

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 25 (1997/1998)

Številka 2

Strani 92–95

Tatjana Juranji:

## ZIDOVI BREZ RAZPOK

Ključne besede: matematika, razvedrilna matematika, geometrija, pokrivanje pravokotnika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/25/1330-Juranji.pdf>

© 1997 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## ZIDOVI BREZ RAZPOK

Pravokotnik velikosti  $m \times n$  želimo pokriti z dominami (majhnimi pravokotniki velikosti  $1 \times 2$ ) tako, da bo pokritje čim bolj "trdno". To pomeni, da ne bo imelo vodoravne ali navpične ravne črte (razpoke), ki bi ga razdelila na dva manjša pravokotnika. Pokritje pravokotnika z dominami bomo imenovali *zid*. V prispevku bomo raziskali, za katere pravokotnike obstajajo zidovi brez razpok.

Če sta obe stranici pravokotnika lihe dolžine, potem je ploščina pravokotnika liho število. Ker vsaka domina pokrije natanko dve polji, takega pravokotnika sploh ne moremo pokriti z dominami. Za vse preostale pravokotnike pa lahko naredimo zidove, saj jih lahko pokrijemo z dominami. Na sliki 1 je prikazana razpredelnica, v kateri je za pravokotnike, z ne prevelikima stranicama, označeno, ali dopuščajo zidove brez razpok ali ne. Prazna polja ustrezajo tistim pravokotnikom, ki ne dopuščajo nobenega pokritja z dominami. S krožci so označeni pravokotniki, za katere obstajajo zidovi brez razpok, s križci pa tisti, ki takih zidov ne dopuščajo. Ker dopuščamo tako vodoravne kot navpične razpoke, je razpredelnica seveda simetrično izpolnjena. Oglejmo si, zakaj imajo zidovi nekaterih velikosti vedno razpoke, drugi pa ne. Zaradi simetrije zadostuje premišljati le o zidovih, ki imajo navpično stranico krajšo ali kvečjemu enako dolgo, kot je vodoravna. Zidove bomo obravnavali po vrsti, razvrščene glede na dolžino krajše stranice.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1		○		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
2	○		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
3				×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
4					×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
5							●		●		●		●	
6						●	×	●	●	●	●	●	●	●
7							●		●		●		●	
8						●	●	●	●	●	●	●	●	●
9							●		●		●		●	
10						●	●	●	●	●	●	●	●	●
11							●		●		●		●	
12						●	●	●	●	●	●	●	●	●
13							●		●		●		●	
14						●	●	●	●	●	●	●	●	●

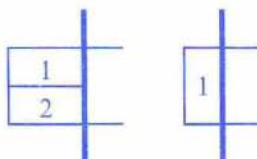
Slika 1.

Vzemimo zid, ki ima krajšo stranico (spomnimo se, da smo privzeli, da je ta navpična) dolžine 1. Tak zid je sestavljen iz nekaj po vrsti zloženih vodoravnih domin. Seveda je med vsakim parom sosednjih domin navpična razpoka. Tak zid torej nima razpoke le tedaj, ko ima daljša stranica dolžino 2.

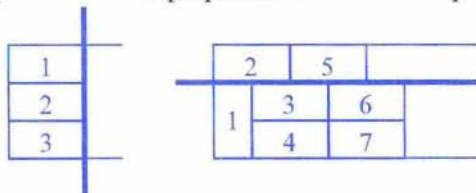
Zid s krajšo stranico dolžine 2 ima vedno razpoko. Vseeno je, kako postavimo prve domine, razpoko gotovo dobimo (glej sliko 2).

Tudi zidovi, ki imajo krajšo stranico dolžine 3, imajo vedno razpoko. Ob krajšo stranico lahko postavimo domine le na dva (bistveno različna) načina; oba sta prikazana na sliki 3.

Prvi način ni dober, ker takoj dobimo navpično razpoko. Pri drugi postavitvi se navpičnim razpokam sicer lahko izognemo, a moramo zato domine polagati na točno določen način (glej sliko 3). Ko hočemo zid zaključiti, pa ne moremo preprečiti vodoravne razpoke.

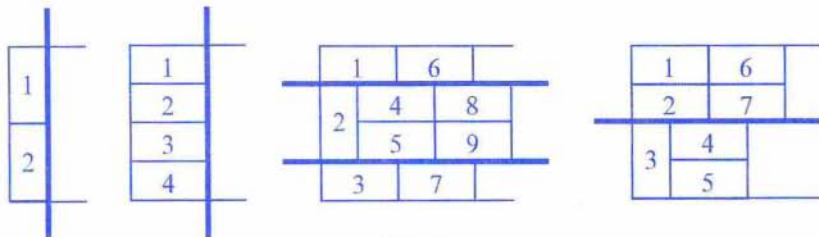


Slika 2.



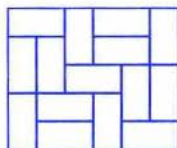
Slika 3.

Podobno kot pri zidovih s krajšo stranico dolžine 3 sklepamo tudi pri zidovih, ki imajo krajšo stranico dolžine 4. Tokrat lahko začnemo na štiri (bistveno različne) načine; vsi so prikazani na sliki 4. Pri prvih dveh takoj dobimo navpično razpoko. Pri drugih dveh se navpičnim razpokam sicer lahko izognemo, je pa polaganje nadaljnjih domin za oba začetka natanko določeno (glej sliko 4). Tudi tokrat pa se na koncu vodoravni razpoki ne moremo izogniti. Zidovi s krajšo stranico dolžine 4 imajo torej vedno razpoko.

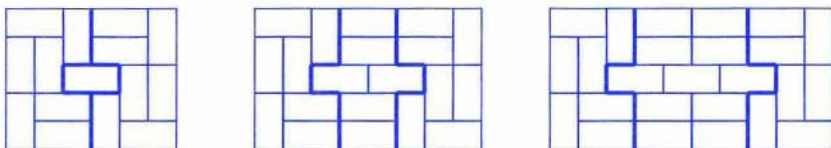


Slika 4.

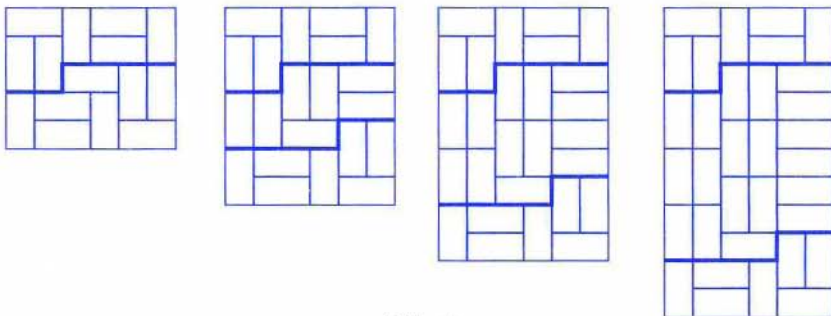
Najmanjši pravi zid brez razpok je velikosti  $5 \times 6$ ; prikazan je na sliki 5. Enostavno ga lahko razširimo za 2 enoti v širino (slika 6) ali v višino (slika 7), tako da ne naredimo razpok. Razširitve lahko naredimo na več načinov, ne le tako, kot je prikazano na obeh slikah. Zid je mogoče razširiti tudi v obe smeri (v širino in v višino) hkrati; na sliki 8 je prikazan zid velikosti  $7 \times 8$ , ki ga dobimo z razširitvijo v obe smeri. Na opisani način lahko zgradimo zidove brez razpok velikosti  $m \times n$ , kjer sta obe stranici dolgi vsaj 5 enot in je ena sode, druga pa lihe dolžine.



Slika 5.

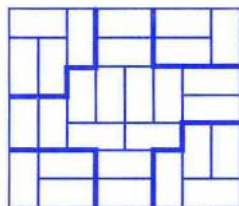


Slika 6.



Slika 7.

Ugotoviti moramo še, kako je z zidovi, ki imajo obe stranici sode dolžine in dolgi vsaj 6 enot. Pokažimo, kako skonstruiramo zid velikosti  $m \times n$ , ki nima razpok, če je vsaj eno od števil  $m$ ,  $n$ , recimo  $m$ , strogo večje od 6. V prejšnjem odstavku smo opisali, kako naredimo zid brez razpok, ki je velikosti  $(m-1) \times n$ . Tega bomo nekoliko spremenili in mu dodali še eno vrsto, tako da bomo dobili zid brez razpok, ki bo velikosti  $m \times n$ . Pri v prejšnjem

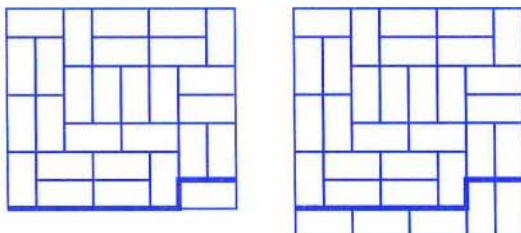


Slika 8.

odstavku opisani konstrukciji imajo vsi zidovi v desnem spodnjem vogalu vodoravno položeno domino. Le-to postavimo v navpično lego in poleg nje dodamo še eno navpično domino. Ostale domine v dodani vrsti položimo

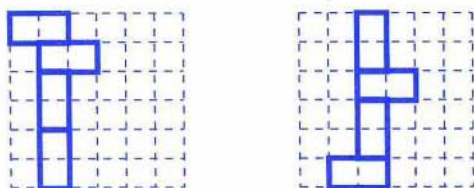


vodoravno. Razširjanje zidu velikosti  $7 \times 8$  je prikazano na sliki 9. Ker je  $m > 6$ , so v zadnjih dveh stolpcih razširjenega zidu tudi vodoravno položene domine, tako da ne dobimo razpoke.



Slika 9.

Zidu velikosti  $6 \times 6$  brez razpok pa ni mogoče narediti. O tem se prepričamo takole. Zid velikosti  $6 \times 6$  je sestavljen iz 18 domin. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da jih je vsaj 9 položenih navpično (sicer zid vsebuje vsaj 9 vodoravnih domin; zasukamo ga za  $90^\circ$  in vodoravne domine postanejo navpične). Recimo, da nima razpoke. Potem v nobenem stolpcu niso položene tri navpične domine (sicer bi imeli razpoko vsaj na eni strani takega stolpca; celo na obeh, če stolpec ni robni). Zid ima 6 stolpcev, navpično postavljenih domin je vsaj 9, kvečjemu 2 sta v istem stolpcu, torej imamo vsaj 3 stolpce, ki vsebujejo po dve navpični domini. Vsaj eden od teh stolpcev ni robni. Preostali polji v tem stolpcu sta pokriti z vodoravnima dominama. Obe nista obrnjeni v isto smer, saj bi sicer dobili navpično razpoko. Ena vodoravna domina torej gleda v levo, druga pa v desno (glej sliko 10). Toda tedaj imata levi in desni del zidu po liho polj in ju ni mogoče pokriti z dominami, kar je v protislovju s predpostavko, da zid nima razpoke.



Slika 10.

Ugotovili smo, kateri pravokotniki dopuščajo zidove brez razpok in kateri ne. Ostaja pa še veliko zanimivih nerešenih vprašanj, npr. koliko različnih zidov brez razpok lahko sestavimo za večje pravokotnike. Zanimiva je tudi ugotovitev, da ima zid velikosti  $6 \times 6$  vedno razpoko, medtem ko obstajajo manjši zidovi in veliko večjih, ki razpoko nimajo.

*Tatjana Juranji*