

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 23 (1995/1996)

Številka 3

Strani 134-136

Jože Grasselli:

OBSTOJNA PRAŠTEVILA

Ključne besede: matematika, teorija števil, praštevila, permutacije števk.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/23/1265-Grasselli.pdf>

© 1996 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

OBSTOJNA PRAŠTEVILA

Ko v praštevilo 13 zamenjamo vrstni red števk, dobimo praštevilo 31. Če napravimo isto s praštevilo 19, pridemo do števila $91 = 7 \cdot 13$, ki ni praštevilo.

Imenujmo dvo ali večmestno praštevilo **obstojno**, če vsaka permutacija njegovih števk pripelje do praštevila. Torej: praštevilo 13 je obstojno, praštevilo 19 pa ne.

Takoj vidimo, da v desetiškem zapisu obstojnega praštevila ne more biti številke 2. Številke namreč lahko preuredimo tako, da pride 2 na mesto enic. Dvo ali večmestno število, ki se končuje z 2, pa ni praštevilo. Iz podobnih razlogov se v obstojnem praštevilo ne more pojavljati tudi nobena od števk 0, 4, 6, 8, 5. Zato: **V desetiškem zapisu obstojnega praštevila nastopajo le številke 1, 3, 7, 9.**

Poiščimo vsa dvomestna obstojna praštevila. Najdemo jih med tistimi dvomestnimi praštevili, ki se zapišejo le s števki 1, 3, 7, 9; torej med praštevili

$$11, 13, 17, \underline{19}, 31, 37, 71, 73, 79, 97, \quad (1)$$

ki so vsa razen 19 obstojna. Vseh dvomestnih praštevil je 21, po (1) je devet obstojnih.

Kako bi našli vsa trimestna obstojna praštevila? Podobno kot v (1) bi iz seznama vseh trimestnih praštevil, ki imajo v zapisu le številke 1, 3, 7, 9, odbrali obstojna praštevila. Ravnamo pa lahko še drugače.

V zapisu trimestnega števila so, ali vse številke enake ali vse številke različne ali pa dve številki enaki.

Če so vse številke enake, je trimestno število deljivo s 3 in ni praštevilo.

Naj bodo vse številke različne. Iz števil

$$137, 139, 179, 379 \quad (2)$$

dobimo s permutacijami števk vsa trimestna števila, ki imajo v zapisu same različne številke 1, 3, 7, 9. Števila (2) so sicer praštevila, ni pa nobeno obstojno. Je namreč

$$371 = 7 \cdot 53, \quad 319 = 11 \cdot 29, \quad 791 = 7 \cdot 113, \quad 793 = 13 \cdot 61.$$

Obstojnih trimestnih praštevil s tremi različnimi števki torej ni.

Naj bosta sedaj v številu od treh števk dve enaki. Napravimo seznam števil, ki se zapišejo z 1, 3, 7, 9 in imajo prvi številki enaki:

$$113, \underline{117}, 119, 331, 337, \underline{339}, \underline{771}, 773, 779, 991, \underline{993}, 997. \quad (3)$$

Obstojna trimestna praštevila z dvema enakima števkama so nujno med števili (3). Podčrtana števila so deljiva s 3, torej niso praštevila. Ker je

$$119 = 7 \cdot 17, \quad 133 = 7 \cdot 19, \quad 737 = 11 \cdot 67, \quad 779 = 19 \cdot 41, \quad 979 = 11 \cdot 89,$$

se seznam (3) skrči na

$$113, 337, 991. \quad (4)$$

Če je kaj trimestnih obstojnih praštevil z dvema enakima števkama, so zajeta v (4). Preizkus ali pogled v praštevilsko tabelo potrdi, da so števila (4) praštevila. Permutacije števk v (4) privedejo do števil

$$113, 131, 311; 337, 373, 733; 991, 919, 199, \quad (5)$$

ki so obenem praštevila.

Sklep: Med trimestnimi praštevili je devet obstojnih, navedena so v (5). Dodajmo še, da je vseh trimestnih praštevil 143.

Pri iskanju štirimestnih obstojnih praštevil je treba upoštevati možnosti: Od štirih števk, vzetih izmed števk 1, 3, 7, 9, so, ali vse štiri različne ali tri različne ali dve različni ali vse štiri enake. Če si pomagamo s praštevilsko tabelo, hitro ugotovimo, da štirimestnih obstojnih praštevil ni. Na tak način bi mogli nadaljevati pri določanju pet in večmestnih obstojnih praštevil.

Večmestno število, ki ima vse števke enake c , ob vsaki permutaciji števk preide vase. Tako število pri $c \neq 1$ ni praštevilo, saj premore delitelj $c > 1$. Vzemimo sedaj, da v številu a nastopa samo številka 1, in to j -krat. Če je j sestavljeno število, je tudi a sestavljeno število. Naj bo namreč $j = st$ in s, t naravni števili, večji od ena. V številu

$$b = 10^{s-1} + 10^{s-2} + \dots + 10 + 1$$

so vse števke 1 in jih je s . Ker je

$$a = b \cdot 10^{j-s} + b \cdot 10^{j-2s} + \dots + b \cdot 10^s + b,$$

deli b število a . Zaradi $1 < s, 1 < t$ je tudi $1 < b < a$ in a sestavljeno število.

Iz zadnje ugotovitve izhaja: Število, ki ima v desetiškem zapisu vse števke enake 1, bi moglo biti praštevilo kvečjemu tedaj, ko je število števk j praštevilo. Za $j = 2$ dobimo praštevilo 11. Ne velja pa to za $j = 3, 5, 7, 11, 13, 17$. Saj je

$$111 = 3 \cdot 37$$

$$11111 = 41 \cdot 271$$

$$1111111 = 239 \cdot 4649$$

$$11111111111 = 21649 \cdot 513239$$

$$1111111111111 = 53 \cdot 79 \cdot 265371653$$

$$11111111111111111 = 2071723 \cdot 5363222357.$$

Pač pa dobimo praštevila za $j = 19, 23$, potem pa za $j = 29, 31, 37, 41$ spet ne.

Znano je, da je praštevil neskončno. Ali med števili, ki se zapišejo s samimi enkami, neskončnokrat naletimo na praštevilo? Ali je obstojnih praštevil neskončno? Na zastavljeni vprašanji pisec teh vrstic ne ve odgovora.

Naloga. Zgoraj so obravnavana obstojna praštevila v desetiškem zapisu. Naj bo p praštevilo. V dvojiškem zapisu je iskati obstojna praštevila le med Mersennovimi števili $1 \dots 1 = 2^p - 1$ (števka 1 nastopa na levi p -krat). Prepričaj se o tem.

Jože Grasselli