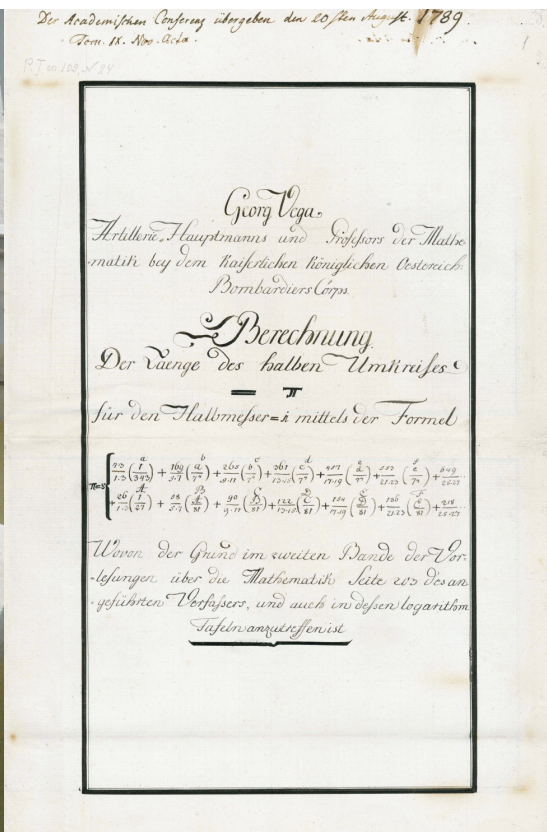


# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije  
Ljubljana, NOVEMBER 2013, letnik 60, številka 6, strani 201–240

**Naslov uredništva:** DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana  
**Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

**Uredniški odbor:** Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2013 DMFA Slovenije – 1926

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

---

## NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  oziroma  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# OSNOVE KVANTNEGA RAČUNALNIŠTVA, 1. DEL

MATIJA PRETNAR

Fakulteta za matematiko in fiziko  
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 68Q12, 81P68

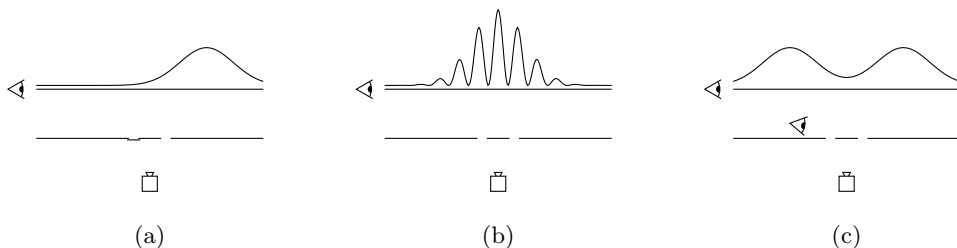
Kvantno računalništvo skuša z izkoriščanjem kvantnih pojavov, kakršni sta superpozicija in prepletenost, učinkoviteje reševati računsko zahtevne probleme. V prvem delu si ogledamo postulate kvantne mehanike ter kvantno teleportacijo.

## THE BASICS OF QUANTUM COMPUTING, PART 1

Quantum computing uses quantum phenomena such as superposition and entanglement in order to efficiently solve computationally hard problems. The first part describes the quantum mechanics postulates and quantum teleportation.

### Uvod

V svetu majhnih delcev ne veljajo več pravila klasične Newtonove mehanike, kot smo jih navajeni, temveč nastopijo nenavadna pravila kvantne mehanike. Po teh pravilih se delci obnašajo tako, kot bi bili na več koncih hkrati, vendar le toliko časa, dokler jim ne izmerimo položaja. Ko pa ga enkrat izmerimo, se obnašajo le v skladu z rezultatom meritve. Primer takega vedenja vidimo v poskusu z dvojno režo (slika 1), v katerem streljamo fotone proti zaslonu z dvema ozkima režama, za zaslonom pa postavimo senzor, ki meri, kam so prileteli fotoni, ki jim je uspelo priti mimo.



**Slika 1.** Količina fotonov, ki jo izmerimo pri poskusu z dvojno režo ob (a) eni odprti reži, (b) obeh odprtih režah in (c) obeh odprtih režah in dodatnem senzorju, ki meri, kje je potoval foton.

Če eno od rež zapremo, največ zadetkov po pričakovanjih izmerimo za drugo režo. Če odpremo obe reži, bi tako pričakovali dva vrhova, za vsako

režo po enega. V resnici pa dobimo interferenčni vzorec. Lahko bi si ga poskušali razložiti s tem, da fotoni na svoji poti motijo drug drugega, vendar dobimo tako sliko tudi, če poskrbimo, da naenkrat streljamo samo en foton. Torej obe možni poti, po katerih bi lahko potoval foton, motita druga drugo. Še več: če postavimo dodaten senzor, s katerim poskušamo ugotoviti, skozi katero režo je šel foton, interferenca izgine, za zaslonom pa izmerimo vrhova, ki smo ju pričakovali prej.

Kvantno računalništvo poskuša te neobičajne kvantne pojave izkoristiti za učinkovitejše računanje. S kvantnim računalništvom je pričel znani fizik Richard Feynman, ko je leta 1981 v svojem govoru [1] predlagal, da bi za simulacijo kvantnih sistemov uporabljali računalnike, ki sami temeljijo na kvantnih načelih. Kvantne sisteme bi sicer lahko simulirali tudi z običajnimi računalniki, a le, če bi bili ti sistemi precej majhni, saj že za sistem z nekaj sto delci potrebujemo računalnik z več pomnilnika, kot je delcev v vesolju.

Kvantno računalništvo se je hitro razširilo še na druga področja, največji razmah pa je doživelo leta 1994, ko je Peter Shor predstavil učinkovit algoritem za razcep na praštevila [3]. Ta algoritem si bomo v drugem delu tudi natančneje ogledali. Ker šifriranje RSA, ki je danes eno najpogosteje uporabljanih, temelji ravno na težavnosti takega razcepa, bi s kvantnimi računalniki postalo neuporabno. No, do sedaj so zaradi tehničnih omejitev leta 2001 razcepili število 15, leta 2012 pa so uspeh ponovili še na številu 21, zato kvantni računalniki za zdaj še ne pomenijo resne grožnje. Za takrat, ko jo bodo, pa odgovore že pripravlja kvantna kriptografija.

Zakaj bi se lotili kvantnega računalništva? Če pogledamo zadnjih 70 let razvoja računalništva, vidimo, da zlata doba kvantnega računalništva šele prihaja in da bo zanimivo biti zraven. Pa tudi če zaradi nepremostljivih tehničnih omejitev ta doba nikoli ne pride, je kvantno računalništvo zanimivo že zato, ker ponuja elegantno formulacijo fizikalno sicer zapletenih kvantnih pojavov.

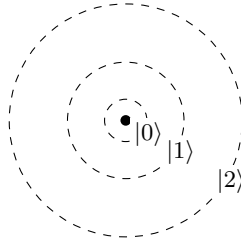
V prvem delu bomo to formulacijo predstavili ter si v njej ogledali enega bolj popularnih kvantnih pojavov: kvantno teleportacijo. V drugem delu pa se bomo osredotočili na kvantne algoritme. Vsem, ki jih kvantno računalništvo še posebej zanima, predlagam v branje [2].

## Postulati kvantne mehanike

### Prostor stanj kvantnega sistema

Vzemimo kvantni sistem s  $k$  ločenimi stanji, ki jih imenujemo *bazna* in jih običajno označimo z  $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |k-1\rangle$ . Poskus z dvojno režo je primer

kvantnega sistema z dvema baznima stanjema, ki ustrezata potema skozi prvo in drugo režo. Pogosto uporabljan primer kvantnega sistema je tudi vodikov atom (slika 2), v katerem je elektron bodisi v osnovnem bodisi v enem od vzbujenih stanj. Energija atoma namreč ne more biti poljubna, temveč lahko zasede le točno določene vrednosti — pravimo, da je *kvantizirana*, od koder tudi izvira ime kvantne mehanike.



**Slika 2.** Shema vodikovega atoma, v katerem je elektron v osnovnem stanju  $|0\rangle$  ali pa v enem od vzbujenih stanj. S tem da omejimo največjo možno energijo elektrona, omejimo tudi število stanj, ki jih lahko zaseda.

Kvantna mehanika nam govori, da je sistem, ki je lahko v danih stanjih, lahko tudi v poljubni *superpoziciji* teh stanj, torej v več stanjih hkrati. Tako superpozicijo opišemo kar z linearno kombinacijo vseh stanj, v katerih se nahaja sistem.

**Postulat 1 (načelo superpozicije).** *Stanje kvantnega sistema opišemo z enotskim vektorjem v prostoru stanj  $\mathcal{H}$ , ki je kompleksni vektorski prostor s skalarnim produktom, v katerem bazna stanja  $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |k-1\rangle$  tvorijo ortonormirano bazo.*

Skalarni produkt vektorjev  $|\varphi\rangle$  in  $|\psi\rangle$  v prostoru  $\mathcal{H}$  pišemo kot  $\langle\varphi|\psi\rangle$ , od koder izhaja tudi *Diracov zapis*, v katerem vektorje pišemo kot  $|\varphi\rangle$ , kar beremo kot *ket*  $\varphi$ . Če v skalarnem produktu prvi vektor držimo pri miru, drugega pa spreminjamo, dobimo *dual* vektorja  $\langle\varphi|$ . To je linearni funkcional, ki vektor  $|\psi\rangle$  slika v kompleksno število  $\langle\varphi|\psi\rangle$ . Dual zato označimo z  $\langle\varphi|$ , kar beremo kot *bra*  $\varphi$ .

Stanje sistema z baznimi stanji  $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |k-1\rangle$  torej opišemo z vektorjem

$$|\varphi\rangle = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j |j\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle + \dots + \alpha_{k-1} |k-1\rangle,$$

pri čemer so koeficienti  $\alpha_j$ , ki jim pravimo *amplitude*, kompleksna števila, za katera velja  $\sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_j|^2 = 1$ . Absolutne vrednosti amplitud nam povedo

delež posameznega stanja v superpoziciji, argumenti (torej kompleksni koti) amplitud, ki jih imenujemo *faze*, pa vplivajo na interferenco med stanji, na primer tisto iz poskusa z dvojno režo.

Včasih namesto Diracovega uporabljamo tudi običajni zapis, pri čemer za standardno bazo zaporedoma vzamemo bazna stanja  $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |k-1\rangle$ . Zgoraj omenjena stanja tako predstavimo z naslednjimi stolpci:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad |k-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad |\varphi\rangle = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j |j\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Spomnimo se, da je za  $|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j |j\rangle$  skalarni produkt  $\langle\varphi|\psi\rangle$  enak  $\sum_{j=0}^{k-1} \bar{\alpha}_j \beta_j$ , zato dual  $\langle\varphi|$  predstavimo z vrstico  $[\bar{\alpha}_0 \quad \bar{\alpha}_1 \quad \dots \quad \bar{\alpha}_{k-1}]$ .

Najbolj preprost kvantni sistem je *kubit*. To je sistem z dvema ločenima stanjema  $|0\rangle$  in  $|1\rangle$ . Primer kubita je vodikov atom, v katerem omejimo energijo tako, da lahko elektron doseže le prvo vzbujeno stanje. Tedaj je po načelu superpozicije poljubno stanje kubita oblike  $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ , kjer velja  $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$ .

Stvari postanejo zares zanimive, ko si ogledamo več kubitov hkrati. Ker ima kubit bazni stanji  $|0\rangle$  in  $|1\rangle$ , lahko v združenem sistemu dveh kubitov ločimo štiri bazna stanja, ki jih označimo z  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$  in  $|11\rangle$ . Toda po načelu superpozicije je tak sistem lahko tudi v superpoziciji teh stanj, torej v enotskem vektorju oblike

$$\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle.$$

Za opis take strukture je kot nalašč *tenzorski produkt*. Za prostora  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}'$  je namreč njun produkt  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  vektorski prostor, sestavljen najprej iz vseh parov vektorjev  $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$  in  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}'$ , ki jih pišemo kot  $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ , nato pa še iz vseh linearnih kombinacij takih parov. Pri tem je operacija  $\otimes$  bilinearna, torej velja:

$$\begin{aligned} \lambda|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle &= |\varphi\rangle \otimes \lambda|\psi\rangle = \lambda(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) \\ (|\varphi\rangle + |\varphi'\rangle) \otimes |\psi\rangle &= |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle + |\varphi'\rangle \otimes |\psi\rangle \\ |\varphi\rangle \otimes (|\psi\rangle + |\psi'\rangle) &= |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle + |\varphi\rangle \otimes |\psi'\rangle. \end{aligned}$$

Par  $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$  dostikrat napišemo tudi kot  $|\varphi\rangle|\psi\rangle$  ali celo kot  $|\varphi\psi\rangle$ , kar smo storili tudi zgoraj pri baznih stanjih sistema dveh kubitov.

Preverimo lahko, da s predpisom

$$\langle \varphi_1 \psi_1 | \varphi_2 \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \cdot \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

dobro definiramo skalarni produkt na prostoru  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ . V tem primeru tudi hitro vidimo, da pari baznih vektorjev tvorijo ortonormirano bazo tenzorskega produkta, to pa ustreza naši prejšnji opazki, da so bazna stanja združenega sistema kar vsi možni pari baznih stanj posameznih sistemov.

**Postulat 2 (združitev kvantnih sistemov).** *Prostor stanj sistema, ki ga dobimo z združitvijo sistemov s prostoroma stanj  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}'$ , je enak tenzorskemu produktu  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ . Če je prvi sistem v stanju  $|\varphi\rangle$  in drugi sistem v stanju  $|\psi\rangle$ , je združen sistem v stanju  $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ .*

Če imamo dva kubita, od katerih je prvi v stanju  $|\varphi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ , drugi pa v stanju  $|\psi\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ , lahko nanju gledamo kot na en sam kvantni sistem, ki je v stanju

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle &= (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle) \\ &= \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Stanjem, ki se dajo zapisati kot  $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ , pravimo *produktna*.

Z ustreznimi spremembami lahko sistem spravimo v stanje, ki ni produktno. Takim stanjem pravimo *prepletena*. Posebno znan primer prepletenega stanja je *Bellovo stanje*  $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ . Iz primerjave amplitud s splošnim produktnim stanjem (1) vidimo, da Bellovo stanje ne more biti produktno, saj bi sicer veljalo  $0 = (\alpha_0\beta_1)(\alpha_1\beta_0) = (\alpha_0\beta_0)(\alpha_1\beta_1) = \frac{1}{2}$ .

## Razvoj kvantnega sistema

Kvantni sistem smo tako v celoti opisali, zdaj pa se lahko posvetimo njegovemu obnašanju. Z večino delujočih kvantnih računalnikov upravljamo prek zunanjih vplivov, na primer z vklopom magnetnega polja ali z obsevanjem s fotoni. S tem spremenimo interakcije v sistemu, s čimer dosežemo, da se sistem začne razvijati proti želenemu stanju. Natančneje obnašanje sistema opišemo s Schrödingerjevo enačbo, s katero pa se tokrat ne bomo ukvarjali, saj bo za naše potrebe dovolj že njena posledica, ki jo bomo privzeli za postulat.

**Postulat 3 (unitarnost razvoja).** *Za vsak razvoj izoliranega kvantnega sistema obstaja unitarna preslikava  $U$ , ki začetno stanje  $|\varphi_0\rangle$  slika v stanje po spremembi  $U|\varphi_0\rangle$ .*

Spomnimo se, da je unitarna preslikava  $U$  linearna preslikava z inverzom  $U^{-1}$ , enakim adjungirani preslikavi  $U^*$ , torej velja  $U^*U = UU^* = I$ . Če preslikavo  $U$  predstavimo z matriko, je adjungirana preslikava  $U^*$  enaka

$$\begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \cdots & \alpha_{0,k-1} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k-1,0} & \alpha_{k-1,1} & \cdots & \alpha_{k-1,k-1} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{00} & \bar{\alpha}_{10} & \cdots & \bar{\alpha}_{k-1,0} \\ \bar{\alpha}_{01} & \bar{\alpha}_{11} & \cdots & \bar{\alpha}_{k-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\alpha}_{0,k-1} & \bar{\alpha}_{1,k-1} & \cdots & \bar{\alpha}_{k-1,k-1} \end{bmatrix}.$$

Matriko torej transponiramo, vse njene elemente pa konjugiramo.

Iskane unitarne preslikave po navadi predstavimo s *kvantnim vezjem*, ki je sestavljeno iz enostavnejših unitarnih preslikav. Tem pravimo tudi *kvantna vrata*, saj imajo podobno vlogo kot logična vrata (in, ali, negacija, ...) v klasičnem računalništvu.

Najpogosteje uporabljana enokubitna kvantna vrata so *Paulijeva vrata*  $X$ ,  $Y$  in  $Z$  ter *Hadamardova vrata*  $H$ . Ker se vrata na splošni superpoziciji obnašajo linearno, je dovolj, da podamo njihovo vedenje na baznih stanjih:

$$\begin{aligned} X|0\rangle &= |1\rangle & Y|0\rangle &= i|1\rangle & Z|0\rangle &= |0\rangle & H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \\ X|1\rangle &= |0\rangle & Y|1\rangle &= -i|0\rangle & Z|1\rangle &= -|1\rangle & H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle. \end{aligned}$$

Paulijevim vratom  $X$  pravimo tudi negacija, saj obrnejo bazni stanji. Stanji  $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$  in  $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ , ki sta rezultat uporabe Hadamardovih vrat  $H$ , pa označimo s  $|+\rangle$  in z  $|-\rangle$ .

Z matrikami bi zgornja vrata lahko zapisali kot:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Za vajo lahko preverimo, da so vse naštetje preslikave ne le unitarne, temveč tudi same sebi inverz.

Na dveh kubitih so najpomembnejša vrata *kontrolirane negacije* CNOT, ki negirajo *ciljni* kubit, kadar je stanje *kontrolnega* kubita enako  $|1\rangle$ . Običajno je prvi kubit kontrolni, drugi pa ciljni. Velja torej

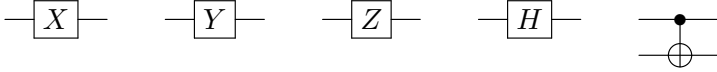
$$\text{CNOT}|00\rangle = |00\rangle \quad \text{CNOT}|01\rangle = |01\rangle \quad \text{CNOT}|10\rangle = |11\rangle \quad \text{CNOT}|11\rangle = |10\rangle$$

oziroma

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Zgornja kvantna vrata v vezjih predstavimo z naslednjimi simboli:



Pri vratih CNOT nam  $\bullet$  označuje kontrolni,  $\oplus$  pa ciljni kubit.

Primer kvantnega vezja je vezje



s katerim iz začetnega stanja  $|00\rangle$  najprej s Hadamardovimi vrati naredimo stanje  $(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$ , s kontrolirano negacijo pa še  $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ , kar je ravno Bellovo stanje.

Drug enostaven in uporaben primer je vezje



s katerim zamenjamo stanji prvega in drugega kubita. Na primer stanje  $|10\rangle$  s prvimi vrati spremenimo v  $|11\rangle$ , z drugimi, ki so ravno tako kontrolirana negacija, le z zamenjanima kontrolnim in ciljnim kubitom, pa v  $|01\rangle$ . Tretja vrata stanje ohranijo na  $|01\rangle$ , saj je stanje kontrolnega kubita enako  $|0\rangle$ . Podobno velja za vsa bazna stanja in po linearnosti posledično za vsako superpozicijo. V posebnem primeru vezje stanje  $|\varphi\rangle|\psi\rangle$  spremeni v  $|\psi\rangle|\varphi\rangle$ .

Tretje vezje, v katerem kubita sploh ne vplivata drug na drugega, pa je *Walsh-Hadamardovo vezje*



ki ga označimo tudi s  $H \otimes H$ , saj velja  $(H \otimes H)(\varphi \otimes \psi) = H\varphi \otimes H\psi$ . Če  $H \otimes H$  uporabimo na baznem stanju  $|00\rangle$ , dobimo

$$\begin{aligned} (H \otimes H)|00\rangle &= H|0\rangle \otimes H|0\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \end{aligned}$$

oziroma superpozicijo vseh baznih stanj. Podobno lahko sestavimo tudi vezje  $H^{\otimes n}$ , ki je namesto iz dveh sestavljeno iz  $n$  vzporednih Hadamardovih vrat. To vezje bazno stanje  $|00 \dots 0\rangle = |0^n\rangle$  slika v superpozicijo

$$\frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle,$$

kjer  $\sum_{x \in \{0,1\}^n}$  oziroma dostikrat tudi kar  $\sum_x$  označuje vsoto po vseh  $2^n$  kombinacijah  $n$  bitov, torej po vseh baznih stanjih.

Na teh treh primerih lahko opazimo pomembno lastnost vseh kvantnih vezij. Ker vsa vezja predstavljajo unitarne preslikave, se število kubitov v kvantnem vezju ohranja. V tem se kvantna vezja razlikujejo od klasičnih, pri katerih se število vhodov in izhodov lahko razlikuje: logična vrata AND recimo iz dveh vhodnih bitov izračunajo en izhodni bit.

Zapletenejšim vezjem se bomo še posvetili, a že zdaj vidimo, kje se skriva osnovna ideja kvantnega računalništva. Klasični računalnik dobi neki vhod in iz njega izračuna želeni rezultat. Če želimo izračunati rezultat še za kak drug vhod, moramo postopek ponoviti. Pri kvantnem računalniku bi z vezjem (4) najprej ustvarili superpozicijo vseh možnih vhodov, nato pa bi iz njih s primernim kvantnim vezjem hkrati izračunali superpozicijo vseh možnih rezultatov.

## Meritve kvantnih stanj

Žal je ta ideja preveč optimistična, saj moramo, če želimo prebrati rezultate, stanje pomeriti. Težava z meritvami kvantnih sistemov pa je v tem, da rezultati niso natančno določeni, poleg tega pa z meritvijo sistem *kolabira* v izmerjeno stanje, s čimer celotno superpozicijo izgubimo.

**Postulat 4 (načelo meritve).** Če merimo sistem v stanju  $\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j |j\rangle$ , z verjetnostjo  $|\alpha_j|^2$  izmerimo stanje  $|j\rangle$ , po meritvi pa je stanje sistema enako  $|j\rangle$ .

Na primer, če merimo sistem v stanju  $\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{i}{2}|1\rangle$ , bomo v treh četrтинah primerov izmerili stanje  $|0\rangle$ , v preostali četrтini pa bomo izmerili stanje  $|1\rangle$ . V obeh primerih pa bo stanje kolabiralo v izmerjeno stanje, zato bomo ob vseh nadaljnjih meritvah dobili enak odgovor.

Kaj pa, če bi pred meritvijo superpozicijo prenesli na neki drug kubit in si s tem naredili varnostno kopijo? Potrebovali bi torej vezje  $U$ , ki bi sprejelo kubit v stanju  $|\varphi\rangle$  ter „prazen“ kubit v stanju  $|0\rangle$ , vrnilo pa bi dva kubita, vsakega v stanju  $|\varphi\rangle$ . To žal ne gre.

**Izrek 1 (izrek o nepodvajanju).** Ne obstaja unitarna preslikava  $U$ , za katero za vsako stanje enega kubita  $|\varphi\rangle$  velja  $U(|\varphi\rangle \otimes |0\rangle) = |\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ .

*Dokaz.* Ker bi preslikava  $U$  podvajala vsa stanja, bi morala podvojiti tudi stanji  $|0\rangle$  in  $|1\rangle$ . Torej bi veljalo

$$U|00\rangle = |00\rangle \quad \text{in} \quad U|10\rangle = |11\rangle.$$

Tedaj pa bi za splošno stanje  $|\varphi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$  zaradi linearnosti  $U$  veljalo

$$U(|\varphi\rangle \otimes |0\rangle) = U(\alpha_0|00\rangle + \alpha_1|10\rangle) = \alpha_0|00\rangle + \alpha_1|11\rangle,$$

kar pa ni isto kot stanje  $|\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ , ki smo ga želeli. ■

Ta rezultat je izjemno pomemben v kvantni kriptografiji, ker izloči kakršnokoli prisluškovanje. Če bi prisluškovalec namreč želel, da sogovornika ne bi opazila njegovih dejanj, bi moral njuno sporočilo podvojiti, preden bi ga izmeril.

V združenem sistemu meritev poteka podobno. Torej, če je sistem dveh kubitov v stanju  $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ , bomo v četrtnini primerov izmerili stanje  $|00\rangle$ , v četrtnini stanje  $|10\rangle$ , v polovici pa stanje  $|11\rangle$ .

Kaj pa, če pomerimo le en kubit? V tem primeru stanje preostalih kubitov ni natanko določeno, mora pa biti skladno z meritvijo. To najenostavneje vidimo, če združeno stanje zapišemo v obliki, v kateri vsakemu stanju prvega kubita pridružimo superpozicijo vseh skladnih stanj drugega kubita:

$$\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \otimes \left( \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle \right).$$

Če pomerimo stanje prvega kubita, bomo v četrtnini primerov tako izmerili stanje  $|0\rangle$ , po meritvi pa bo stanje enako  $|00\rangle$ , saj stanji  $|10\rangle$  in  $|11\rangle$  nista skladni z meritvijo. V treh četrtninah primerov pa izmerimo stanje  $|1\rangle$ , po meritvi pa je stanje združenega sistema enako  $\sqrt{\frac{1}{3}}|10\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|11\rangle$ .

**Postulat 5 (meritev v združenem sistemu).** Če je združen sistem v stanju  $\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j |j\rangle \otimes |\psi_j\rangle$ , kjer so vsi vektorji  $|\psi_j\rangle$  enotski, potem pri meritvi prvega sistema z verjetnostjo  $|\alpha_j|^2$  izmerimo stanje  $|j\rangle$ , po meritvi pa je stanje združenega sistema enako  $|j\rangle \otimes |\psi_j\rangle$ .

Sistem v produktnem stanju  $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ , kjer je  $|\varphi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ , lahko zapišemo kot

$$(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes |\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle|\psi\rangle + \alpha_1|1\rangle|\psi\rangle,$$

zato posamezne meritve prvega sistema dobimo z enako verjetnostjo, kot bi jih v ločenem sistemu, v obeh primerih pa drugi sistem ostane v stanju  $|\psi\rangle$ . V stanjih, ki niso produktna, tako kot v prejšnjem primeru, pa lahko z

meritvijo enega kubita določimo tudi stanje drugega. Prav zato taka stanja imenujemo prepletena.

Recimo, da meritev izvedemo na Bellovem stanju  $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ . Vidimo, da je po kakršnikoli meritvi enega od kubitov tudi drugi kubit v enakem stanju kot prvi. Če pazimo, da ni zunanjih vplivov, se prepletenost ohrani tudi takrat, ko kubita fizično ločimo in odnesemo daleč narazen. In tudi sedaj bo v trenutku, ko pomerimo prvi kubit, drugi v natanko istem stanju. Videti je, da smo s tem kršili načela teorije relativnosti, saj informacija ne more potovati hitreje od svetlobe. To imenujemo tudi Einstein-Podolski-Rosenov oziroma EPR paradoks. Poenostavljeno ga lahko razrešimo, če vidimo, da nimamo vpliva na rezultat meritve prvega kubita, zato same prepletenosti v resnici ne moremo uporabiti za prenos informacije.

### Kvantna teleportacija

A vseeno si s prepletenostjo lahko pomagamo pri prenosu stanja prek velikih razdalj, kjer nam vezje (3) ne koristi. Ena možnost je, da kubit v zelenem stanju fizično odnesemo na cilj, vendar lahko stanje zaradi motenj med prenosom izgubimo. Drugo možnost ponuja *kvantna teleportacija*.

Stanja kubita, ki ga označimo z  $A$ , bomo prenesli s pomočjo vnaprej pripravljene prepletenega para kubitov v Bellovem stanju  $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ . Ta dva kubita, ki ju označimo z  $B$  in  $C$ , ločimo in odnesemo na konca, med katerima želimo prenesti stanje. V tem primeru nas motnje med prenosom ne skrbijo, saj lahko z vezjem (2) enostavno ustvarimo cel kup prepletenih parov. Začnemo torej v stanju

$$(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|111\rangle,$$

končati pa želimo tako, da bo kubit  $C$  v stanju  $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ .

Groba ideja je, da kubit  $B$  dodatno prepletemo s kubitom  $A$ , nato pa z meritvami prvo prepletenost porušimo in ob tem stanje prenesemo na kubit  $C$ . To storimo tako, da uporabimo vrata CNOT na kubitih  $A$  in  $B$ , s čimer sistem spravimo v stanje

$$\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|110\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|101\rangle,$$

nato pa kubit  $B$  pomerimo:

1. Če izmerimo, da je  $B$  v stanju  $|0\rangle$ , stanje kolabira v  $\alpha_0|000\rangle + \alpha_1|101\rangle$ . Tako nam je uspelo med kubitoma  $A$  in  $C$  ustvariti ustrezno prepletenost, ki se je znebimo tako, da kubit  $A$  "razpršimo" s Hadamardovimi

vrti  $H$  in s tem sistem spravimo v stanje

$$\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|001\rangle - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}|101\rangle.$$

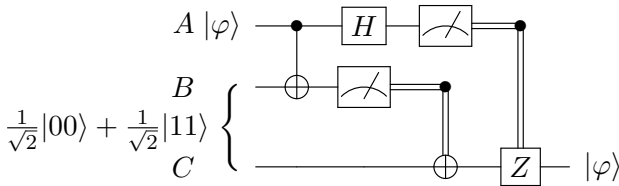
Na koncu pomerimo še  $A$ . Če izmerimo  $|0\rangle$ , sistem kolabira v stanje

$$\alpha_0|000\rangle + \alpha_1|001\rangle = |00\rangle \otimes (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle),$$

kar je točno to, kar smo želeli. Če pa izmerimo  $|1\rangle$ , sistem podobno kolabira v stanje  $|10\rangle \otimes (\alpha_0|0\rangle - \alpha_1|1\rangle)$ , kar lahko z uporabo vrat  $Z$  na kubit  $C$  spet spravimo v iskano stanje.

- Če pa izmerimo, da je  $B$  v stanju  $|1\rangle$ , ravnamo podobno, le da kubit  $C$  poprej še negiramo.

Celotno teleportacijo lahko predstavimo s shemo:



V tej shemi simbola merilnika označujeta meritvi kubitov  $A$  in  $B$ . Odvisno od rezultata teh meritev na kubit  $C$  po potrebi uporabimo še negacijo in fazna vrata  $Z$ . To pogojno uporabo označimo tako, kot jo pri vratih CNOT, le da za kontrolo namesto kvantnega uporabimo klasični bit, kar poudarimo z dvojno žico.

Za kvantno teleportacijo moramo torej med obema koncema prenesti še informacijo o meritvi kubitov  $A$  in  $B$ . Ker je ta informacija klasična, jo prenesemo brez večjih težav, na primer po elektronski pošti. Zaradi tega klasičnega prenosa smo prav tako omejeni s hitrostjo svetlobe, zato do EPR paradoksa v tem primeru ne pride. Tudi izreka o nepodvajanju nismo kršili, saj smo med prenosom z meritvami uničili stanje kubit  $A$ .

## LITERATURA

- [1] R. P. Feynman, *Simulating Physics with Computers*, Int. J. Theor. Phys. **21** (1982), 467–488.
- [2] P. Kaye, R. Laflamme in M. Mosca, *An Introduction to Quantum Computing*, Oxford University Press, Inc., New York, 2007.
- [3] P. W. Shor, *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **26** (1997), 1484–1509.

# VEGOVIH 140 DECIMALK KROŽNE KONSTANTE

PETER LEGIŠA<sup>1</sup> IN MARKO RAZPET<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

<sup>2</sup>Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A50

V prispevku je na podlagi virov predstavljeno prizadevanje barona Jurija Vega v računanju števila  $\pi$  na 140 decimalk. Pojasnjeno je tudi, zakaj njegove zadnje decimalke niso točne.

## VEGA'S 140 DIGITS OF THE CIRCULAR CONSTANT

We present, using all available references, the effort of Baron Jurij Vega to compute number  $\pi$  to 140 digits. We explain why his last digits are wrong.

### Uvod

Če gledamo iz današnje perspektive, posebno velikega napredka v računanju števila pravih decimalk krožne konstante, to je števila  $\pi$ , do Isaaca Newtona (1643–1727) pravzaprav ni bilo. Kot kaže, je bil ravno Newton prvi, ki je opustil preživelo arhimedsko metodo krogu včrtanih in očrtanih pravih večkotnikov in je izračunal  $\pi$  na 15 decimalk natančno s številsko vrsto. V prispevku [8] je na kratko opisano, katero vrsto je Newton uporabil za računanje te znamenite matematične konstante, razmerja med obsegom in premerom kroga, in kako je do nje prišel.

Da pa ne bi ponavljali tistega, kar že piše v [8], rajši nakažimo, kako privedemo do Newtonove vrste za  $\pi$  nekoliko drugače. Na dva načina izračunamo integral

$$I = \int_0^{1/4} \sqrt{x-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/4} \sqrt{1-(1-2x)^2} dx.$$

Najprej z vpeljavo nove integracijske spremenljivke  $u$  z relacijo  $1-2x = \sin u$  dobimo

$$I = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{1}{8} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + \cos 2u) du = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32},$$

nato pa z razvojem v binomsko vrsto in z integracijo na intervalu  $[0, 1/4]$  še

$$I = \frac{1}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{(2n+3)(2n-1)4^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!(2n+3)16^n}.$$

Pri tem pomeni  $1!! = 1$ ,  $2!! = 2$ ,  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$  in  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)$  za vsako naravno število  $n > 1$ . Iz obeh izrazov za  $I$  najdemo nazadnje

$$\pi = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} - 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(2n+3)(n-1)!n!16^n}.$$

Izpišimo nekaj členov vrste:

$$\pi = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} - 12 \left( \frac{1}{80} + \frac{1}{1792} + \frac{1}{18432} + \frac{5}{720896} + \dots \right).$$

Pri sodobni demonstraciji, kako računanje števila  $\pi$  poteka po enem od postopkov iz minulih stoletij, pride prav primeren računalniški program, ki zna računati s števili na veliko desetiških mest. Tak je na primer program *Mathematica*. Izidor Hafner je pripravil demonstracijo tudi za pravkar opisan Newtonov postopek in je na razpolago na svetovnem spletu pod naslovom [3]. Da lahko z njo raziskujemo, moramo kot uporabniki prej namestiti na računalnik Wolframov CDF player.

Povedati je treba, da v Newtonovem času delo z vrstami še ni bilo teoretično prav posebno dognano. Dobro so obvladali le geometrijsko vrsto in druge z njo primerjali. Za potenčne vrste, kamor spada tudi binomska, pa so vedeli, da za dovolj majhne argumente konvergirajo. Kar smo zgoraj počeli z binomsko vrsto, je bilo korektno, če se sklicujemo na znane lastnosti potenčnih vrst na konvergenčnem območju.

Hitrejša in natančnejša računanja števila  $\pi$  omogoča Gregoryjeva, tudi Leibnizeva, vrsta

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (1)$$

ki konvergira, če je  $|x| \leq 1$ . Vrsto (1) so dolga leta uspešno uporabljali pri računanju števila  $\pi$  na vedno več decimalk in tako dosegali nove in nove rekorde.

Vrsta (1) seveda konvergira tem hitreje, čim manjši je  $x$ . Vsota vrste pa se od delne vsote po absolutni vrednosti razlikuje manj, kot je absolutna vrednost prvega člena, ki ni zajet v delni vsoti. Zato lahko ocenimo, koliko členov moramo sešteti, da dobimo vsoto vrste s predpisano natančnostjo. Število  $\pi$  dobimo iz vrste (1) za  $x = 1$ , na žalost pa dobljena vrsta zelo počasi konvergira, in sicer pogojno.

Angleški matematik in astronom Abraham Sharp (1653–1742) je v vrsti (1) uporabil  $x = \sqrt{3}/3$  in z dobljeno vrsto mu je leta 1699 uspelo najti 71

točnih decimalk števila  $\pi$ . Že čez 7 let je bilo znanih njegovih 100 decimalk. Zasluga za to gre angleškemu matematiku in astronomu Johnu Machinu (1680–1751), ki je uporabil formulo

$$\pi = 4 \left( 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \right), \quad (2)$$

ki se imenuje po njem (izpeljava je na voljo na primer v [12, str. 399]). Velški matematik William Jones (1675–1749) je leta 1706 v delu [6, str. 243, 263], ki je neke vrste uvod v matematiko, opisal Machinov uspeh, predstavil vseh 100 decimalk števila  $\pi$  in obenem predlagal, da se krožno konstanto označi s  $\pi$  po prvi črki grške besede περιφέρεια, kar pomeni *obod*, *krog*.

Thomas Fantet de Lagny (1660–1734) je bil še bolj vztrajen in z isto vrsto kot Sharp leta 1719 izračunal število  $\pi$  na 127 decimalk, dve leti kasneje pa je bil rezultat objavljen [7]. Kot kaže, se dolgo vrsto let z računanjem števila  $\pi$  nihče ni več resno ukvarjal in kot najboljši dotakratni rezultat so po matematičnih besedilih navajali objavljeni de Lagnyjev približek, ne vedoč, da je 113. decimalka, verjetno zaradi tiskarske napake, napačna. To ni nič čudnega, saj boljšega rezultata, s katerim bi primerjali de Lagnyjev dosežek, še ni bilo na razpolago. Šele Jurij Vega je kasneje našel napako na 113. decimalki.

Leonhard Euler (1707–1783) se pri vsem svojem obsežnem delu ni prav veliko ukvarjal z računanjem krožne konstante, izračunal je le 20 njenih decimalk leta 1755. Verjetno pa je s svojo avtoriteto in deli najbolj zaslužen za to, da jo še danes označujemo s  $\pi$ , kar je sicer prvi predlagal omenjeni Jones. Euler je tudi našel več formul Machinovega tipa:

$$\pi = 4 \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right), \quad (3)$$

$$\pi = 4 \left( 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} \right), \quad (4)$$

$$\pi = 4 \left( 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{11} \right), \quad (5)$$

$$\pi = 4 \left( 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{79} \right). \quad (6)$$

Te formule preverimo z uporabo adicijskega izreka in njegovih posledic za funkcijo tangens.

Euler je razvil formulo za transformacijo konvergentne vrste

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$$



pri pozitivnih koeficientih  $a_n$  in pozitivnem  $x$ . Pri tem je večkrat uporabil difference koeficientov  $a_n$ . Ker je Eulerjeva izpeljava zamudna, si raje oglejmo transformacijo za vrsto (1), ki očitno sodi v ta primer, če iz nje izpostavimo  $x$  in vpeljemo novo spremenljivko  $t = x^2$ . Krajšo pot za Eulerjevo transformacijo vrste (1) najdemo v [1]. Poteka pa takole:

V integralu

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

naredimo substitucijo  $t = x\sqrt{1-s}$  in zapišemo

$$dt = -\frac{x ds}{2\sqrt{1-s}}, \quad 1+t^2 = (1+x^2) \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}s\right).$$

S tem dobimo

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{x}{1+x^2} \int_0^1 \frac{ds}{2\sqrt{1-s} \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}s\right)}.$$

Razvijemo v geometrijsko vrsto

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{1+x^2}s} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n s^n$$

in za  $|s| \leq 1$  po zamenjavi seštevanja in integriranja dobimo

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n,$$

pri čemer je

$$A_n = \int_0^1 \frac{s^n ds}{2\sqrt{1-s}} = \frac{1}{2} \mathbf{B}(n+1, 1/2) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} \varphi d\varphi = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Pri tem je  $\mathbf{B}$  oznaka za funkcijo beta. Nazadnje je pred nami Eulerjev razvoj:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n. \quad (7)$$

V njem vzamemo  $0!! = 1$ . Eulerjevo transformacijo (7) vrste (1) smo navedli zato, ker je napisana v pripombah Peterburške akademije znanosti k Vegovemu članku. Eulerjeva formula (7) postane s tem ugodna, ker so izrazi za  $x^2/(1+x^2)$  v njej za  $x \in \{1/2, 1/3, 1/7, 2/11, 3/79\}$  zelo lepi za računanje. Dobimo namreč ulomke  $2/10, 1/10, 2/100, 32/1\,000, 144/100\,000$ .

Zahvaljujoč Izidorju Hafnerju imamo na svetovnem spletu (obiščite stran [2]) tudi demonstracijo računanja števila  $\pi$  po formulah (3), (4), (5) in (6), ki so predelane po (7).

## Kako je Vega računal krožno konstanto?

Baron Jurij Vega (1754–1802) je v svojih izračunih v taki vrsti združeval po dva in dva člena:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+3) - (4n+1)x^2}{(4n+1)(4n+3)} x^{4n+1}. \quad (8)$$

Euler in Vega še nista uporabljala indeksov v zaporedjih, zato sta koeficiente vrst zapisovala kar s črkami različnih oblik po abecedi.

Vega je uporabil Huttonovo oziroma Eulerjevo formulo Machinovega tipa (4) in leta 1789 poslal Carski akademiji znanosti v Sankt Peterburg svoj izračun števila  $\pi$  na 143 decimalk z opisom postopka vred. Charles Hutton (1737–1823), angleški matematik, je predaval na vojaški akademiji, tako kot Vega. Hutton je formulo (4) razvil leta 1776, neodvisno od njega pa še Euler leta 1779.

Za prvi člen v (4) dobimo po (8) številsko vrsto

$$8 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+3) - (4n+1)(1/3)^2}{(4n+1)(4n+3)} (1/3)^{4n+1},$$

ki jo še malo predelamo, da dobimo

$$8 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32n+26}{(4n+1)(4n+3)3^{4n+3}}.$$

Podobno se izraža drugi člen v (4):

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{96n+73}{(4n+1)(4n+3)7^{4n+3}}.$$

Označimo za  $n \geq 0$ :

$$\alpha_n = \frac{96n+73}{(4n+1)(4n+3)7^{4n+3}}, \quad \beta_n = \frac{32n+26}{(4n+1)(4n+3)3^{4n+3}}. \quad (9)$$

Potem je

$$\pi = 8 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \right). \quad (10)$$

Vega je nekaj členov  $\alpha_n$  in  $\beta_n$  zapisal po svoje, kot je razvidno iz dopisa Peterburški akademiji in iz besedila, ki ga je le-ta objavila. V tem dopisu

je navedel še en postopek za izračun števila  $\pi$  po Eulerjevi formuli (6). V tem primeru je prvi člen zapisal tako, da je uporabil prvi način:

$$20 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = 40 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n.$$

Drugi člen v (6) pa je izrazil kot razliko dveh vrst, potem ko je v (1) vstavil  $x = 3/79$ :

$$8 \operatorname{arctg} \frac{3}{79} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{3}{79}\right)^{4n+1} - 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+3} \left(\frac{3}{79}\right)^{4n+3}.$$

Če označimo za  $n \geq 0$

$$\gamma_n = \frac{1}{4n+1} \left(\frac{3}{79}\right)^{4n+1}, \quad \delta_n = \frac{1}{4n+3} \left(\frac{3}{79}\right)^{4n+3},$$

potem je izraz za  $\pi$  tak:

$$\pi = 40 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n + 8 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n - \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \right). \quad (11)$$

Člene  $\gamma_n$  in  $\delta_n$  je Vega zapisal v njemu lastnem slogu, z neindeksiranimi črkami.

### Kaj je Vega poslal Peterburški akademiji?

Besedilo, ki ga je Vega poslal leta 1789 v Sankt Peterburg, je napisano z zelo lepim rokopisom v nemščini in je ohranjeno. Prevedeno v naš jezik pa zveni takole:

*Jurija Vega*

*topniškega stotnika in profesorja matematike pri Cesarsko-kraljevskem avstrijskem topniškem korpusu*

*„Izračun dolžine polovice obsega“*

*=  $\pi$*

*pri polmeru = 1 po formuli*

$$\pi = 8 \left\{ \begin{array}{l} \frac{73}{1 \cdot 3} \left( \frac{a}{343} \right) + \frac{169}{5 \cdot 7} \left( \frac{b}{7^4} \right) + \frac{265}{9 \cdot 11} \left( \frac{c}{7^4} \right) + \frac{361}{13 \cdot 15} \left( \frac{d}{7^4} \right) + \frac{457}{17 \cdot 19} \left( \frac{e}{7^4} \right) + \\ + \frac{553}{21 \cdot 23} \left( \frac{f}{7^4} \right) + \frac{649}{25 \cdot 27} \dots \\ + \frac{26}{1 \cdot 3} \left( \frac{A}{27} \right) + \frac{58}{5 \cdot 7} \left( \frac{B}{81} \right) + \frac{90}{9 \cdot 11} \left( \frac{C}{81} \right) + \frac{122}{13 \cdot 15} \left( \frac{D}{81} \right) + \frac{154}{17 \cdot 19} \left( \frac{E}{81} \right) + \\ + \frac{186}{21 \cdot 23} \left( \frac{F}{81} \right) + \frac{218}{25 \cdot 27} \dots \end{array} \right.$$

Osnovo za to najdemo v drugem zvezku Matematičnih predavanj na str. 203 tega avtorja in tudi v njegovih Logaritemskih tabelah.

**Opomba 1.** Pri določitvi števk na 143. decimalnem mestu v posameznih členih navedenih vrst niso bili upoštevani nadaljnji ostanki. Zato pa je bil pri seštevanju členov na 143. decimalnem mestu dodan ustrezen ostanek, tako da je pri vrednosti za  $\pi$  143. decimalka verjetno napačna le za nekaj enot, 140. decimalka pa je že povsem gotovo določena. Primerjava tu razvite vrednosti za  $\pi$  z njegovo vrednostjo, ki jo sicer najdemo v več spisih izračunano na 127 decimalk, kaže na 113. kakor tudi na 127. decimalnem mestu odstopanje, kar pri 113. decimalki domnevno izvira iz tiskarske napake, ki se je razširila povsod. Da je tukaj navedeni izračun s 140 decimalnimi mesti povsem pravilen, je jasno od tod, ker so bili izračuni ponovljeni ob različnih časih in so se zmeraj ujemali; prav tako ga lahko zelo enostavno podvržemo preverbi z naslednjo vrsto:

$$\frac{1}{8}\pi = \left\{ \begin{array}{l} 5 \left[ \frac{73}{1 \cdot 3} \left( \frac{A}{343} \right) + \frac{169}{5 \cdot 7} \left( \frac{B}{2401} \right) + \frac{265}{9 \cdot 11} \left( \frac{C}{2401} \right) + \frac{361}{13 \cdot 15} \left( \frac{D}{2401} \right) + \frac{457}{17 \cdot 19} \left( \frac{E}{2401} \right) \right. \\ \left. + \frac{553}{21 \cdot 23} \left( \frac{F}{7^4} \right) + \dots \right] \\ + \left[ \left( \frac{a}{79} \right) + \frac{1}{5} \left( \frac{c}{6241} \right) + \frac{1}{9} \left( \frac{e}{6241} \right) + \frac{1}{13} \left( \frac{g}{6241} \right) + \frac{1}{17} \left( \frac{i}{6241} \right) + \dots \right] \\ - \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{9a}{6241} \right) + \frac{1}{7} \left( \frac{d}{6241} \right) + \frac{1}{11} \left( \frac{f}{6241} \right) + \frac{1}{15} \left( \frac{h}{6241} \right) + \frac{1}{19} \left( \frac{k}{6241} \right) + \dots \right] \end{array} \right.$$

Vega je za izpeljavo teh dveh vrst uporabil formuli (4) in (6).

### Kaj je objavila Peterburška akademija?

Vega je bil prepričan, da je njegovih 140 decimalk točnih, v resnici pa je bilo točnih samo 126. Je pa odkril, da je 113. de Lagnyjeva decimalka 8, ne

pa 7, decimalke od 114. do 127. pa so pravilne. Strogi zapisovalci rekordov seveda de Lagnyju priznajo le 112 pravih decimalk. Zelo verjetno gre pri nesrečni 113. decimalki res le za napako pri prepisovanju, kar je ugotovil že Vega sam.

Ruska akademija je z objavo zakasnila: namesto leta 1791 je Vegov  $\pi$  luč sveta v Rusiji ugledal šele leta 1795. Vegovo besedilo so prevedli v francoščino [10] in pri tem naredili nekaj napak. Tako so v naslovu zmotno *polmer* prevedli v *premer*. Prevod celotnega članka v slovenščino pa je takšen:

**DOLOČITEV**  
**POLOVIČNEGA OBSEGA KROGA,**  
**KATEREGA PREMER JE = 1, IZRAŽENA NA 140 DECIMALK**  
 po M. GÉORGE VEGA,  
 predstavljena Akademiji 20. avgusta 1789.

Akademija misli, da lahko opusti vstavljanje vsega dolgega in naporega računa, s katerim je avtor prišel do vrednosti za  $\pi$ , ali polovični obseg kroga, katerega polmer je = 1; zadošča, da prepíšemo ti dve neskončni vrsti, ki se ju je poslužil in ki sta (\*)

$$\pi = 8 \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{73}{1 \cdot 3} a + \frac{169}{5 \cdot 7} b + \frac{265}{9 \cdot 11} c + \frac{361}{13 \cdot 15} d + \frac{457}{17 \cdot 19} e \\ \quad + \frac{553}{21 \cdot 23} f + \frac{649}{25 \cdot 27} g + \& c. \\ + \frac{26}{1 \cdot 3} A + \frac{58}{5 \cdot 7} B + \frac{90}{9 \cdot 11} C + \frac{122}{13 \cdot 15} D + \frac{154}{17 \cdot 19} E \\ \quad + \frac{186}{21 \cdot 23} F + \frac{218}{25 \cdot 27} G + \& c. \end{array} \right\},$$

kjer črke  $a, b, c, d$  itd.  $A, B, C, D$  itd. označujejo naslednje ulomke:

$$\begin{array}{ll} a = \frac{1}{343} & A = \frac{1}{27} \\ b = \frac{a}{7 \cdot 343} \text{ ali } b = \frac{a}{7^4} & B = \frac{A}{81} \\ c = \frac{b}{7 \cdot 343} & C = \frac{B}{81} \\ d = \frac{c}{7 \cdot 343} & D = \frac{C}{81} \\ \& c. & \& c., \end{array}$$

---

(\*) Ti dve vrsti sta izredno konvergentni, ampak tako števci kot imenovalci ulomkov, ki jih sestavljajo, naredijo števila neudobna za izračune. Pokojni g. Euler je dal v članku, ki ga bomo vstavili v zvezek X naših Aktov, dvojno vrsto, ki pravzaprav ni tako konvergentna kot tiste g. majorja Vege, zato pa je zakonitost, po kateri je sestavljena, mnogo bolj jasna, & ki bi, ker je mnogo bolj udobna, neskončno skrajšala delo tistemu, ki bi jo uporabil, da bi izračunal vrednost za  $\pi$ . Tu je ta dvojna vrsta:

$$\pi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{28}{10} \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{2}{100} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left( \frac{2}{100} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left( \frac{2}{100} \right)^3 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \left( \frac{2}{100} \right)^4 + \& c. \right] \\ + \frac{30336}{100000} \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{144}{100000} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left( \frac{144}{100000} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left( \frac{144}{100000} \right)^3 + \& c. \right] \end{array} \right\}$$

od koder avtor izračuna naslednjo vrednost za

$$\begin{aligned} \pi = & 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433 \\ & 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510 \\ & 58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286 \\ & 20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679 \\ & 82148\ 08651\ 32823\ 06647\ 09384 \\ & 44767\ 21386\ 11733\ \cancel{138}. \end{aligned}$$

Vrsti, po katerih je bila najdena ta vrednost, sta dokazani v drugem delu Matematičnih lekcij istega avtorja (<sup>°</sup>), kakor tudi v njegovih logaritmičnih tabelah.

Ko je določeval zadnje tri decimalke, ki sledijo 140., avtor sploh ni upošteval ostanka, ki bi ga bilo treba prišteti, da bi potisnil natančnost do 144. in naslednjih mest; namesto tega je dodal ostanek po oceni, zaradi česar se celo ta tri zadnja mesta ne bi smela razlikovati od resnične vrednosti za več kot nekaj enot.

Ko smo primerjali to vrednost za  $\pi$  s tistimi, ki jih že najdemo v več spisih izraženo do 127 decimalk, opazimo, da se avtorjeva vrednost razlikuje le na dveh mestih, in sicer na 113. in 127. mestu. Prva je namesto 3 (<sup>†</sup>) enaka 8 in druga namesto 6 enaka 4. Glede na to, da je avtor večkrat ponovil svoje izračune, je zelo prepričljivo, da 113. decimalka v stari vrednosti ne more biti kaj drugega kot tiskarska napaka, ki se je širila iz enega spisa v drugega, še toliko bolj, ker se vsa nadaljnja mesta ujemajo v obeh izračunih. Ker je 127. mesto zadnje v starem izračunu, ga ne bi smeli jemati zares, enako kot zadnja tri mesta v sedanji vrednosti, ki gre do 143. decimalke, ki jih je avtor zato prečrtal.

Avtor na koncu doda še eno novo izražavo vrednosti za  $\pi$ , katerega osmina je enaka vsoti naslednjih treh vrst:

$$\begin{aligned} & 5 \cdot \left( \frac{73}{1 \cdot 3} A + \frac{169}{5 \cdot 7} B + \frac{265}{9 \cdot 11} C + \frac{361}{13 \cdot 15} D + \frac{457}{17 \cdot 19} E + \& c. \right) \\ & + 1 \cdot \left( a + \frac{1}{5} c + \frac{1}{9} e + \frac{1}{13} g + \frac{1}{17} i + \& c. \right) \\ & - 1 \cdot \left( \frac{1}{3} b + \frac{1}{7} d + \frac{1}{11} f + \frac{1}{15} h + \frac{1}{19} k + \& c. \right) \end{aligned}$$

(<sup>°</sup>) G. Vega. Vorlesungen über die Mathematik, stran 203.

(<sup>†</sup>) Pravilno 7 (pripomba avtorjev).

Pri tem črke  $A, B, C, D$  itd. in  $a, b, c, d$  itd. označujejo naslednje ulomke:

$$\begin{array}{ll} A = \frac{1}{343} & a = \frac{3}{79} \\ B = \frac{A}{7 \cdot 343} = \frac{A}{2401} & b = \frac{9a}{6241} = \frac{9a}{79^2} \\ C = \frac{B}{2401} & c = \frac{9b}{6241} \\ D = \frac{C}{2401} & d = \frac{9c}{6241} \\ E = \frac{D}{2401} & e = \frac{9d}{6241} \\ \& c. & \& c. \end{array}$$

To je tudi konec Vegovega članka. V opombi pod črto (\*) je izraz za  $\pi$ , v katerem je Euler uporabil izraz (6) in za oba člena (7). Videli smo že, da ima za  $x = 1/7$  in  $x = 3/79$  izraz  $x^2/(1+x^2)$ , ki nastopa v (7), lepi vrednosti, in sicer  $2/100$  in  $144/100\,000$ , s katerima ni težko računati. Z dvojno vrsto so peterburški akademiki seveda mislili na vsoto dveh vrst.

V prvem delu Vegovega dopisa Peterburški akademiji opazimo oznake  $a, b, c, \dots$  in  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ , ki pomenijo:

$$a = 1/343 = 1/7^3, \quad b = a/7^4 = 1/7^7, \quad c = b/7^4 = 1/7^{11}, \quad \dots,$$

$$\mathcal{A} = 1/27 = 1/3^3, \quad \mathcal{B} = \mathcal{A}/81 = 1/3^7, \quad \mathcal{C} = \mathcal{B}/81 = 1/3^{11}, \quad \dots$$

Črk  $j$  in  $\mathcal{J}$ , kdo ve zakaj, pri tem ni uporabljal, črke  $u, v, \mathcal{U}$  in  $\mathcal{V}$  pa je uporabljal nedosledno. Vegove kaligrafske črke  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$  so akademiki prepisali v navadne:  $A, B, C, \dots$ . Tudi sicer uporaba istih črk z različnim pomenom v prvem in drugem delu ni najbolj posrečena.

Členi (9) so z Vegovimi  $a, b, c, \dots$  in  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$  povezani takole:

$$\alpha_0 = \frac{73}{1 \cdot 3} a, \quad \alpha_1 = \frac{169}{5 \cdot 7} b, \quad \alpha_2 = \frac{265}{9 \cdot 11} c, \quad \dots,$$

$$\beta_0 = \frac{26}{1 \cdot 3} \mathcal{A}, \quad \beta_1 = \frac{58}{5 \cdot 7} \mathcal{B}, \quad \beta_2 = \frac{90}{9 \cdot 11} \mathcal{C}, \quad \dots$$

V opombi pod črto (\*) je rečeno: *zato pa je zakonitost, po kateri je sestavljena, mnogo bolj jasna* (mišljen je Eulerjev zapis členov). To ni čisto res. Števci 73, 169, 265, ... in 26, 58, 90, ... v Vegovih oznakah ne sestavljajo zapletenih zaporedij, ampak preprosti aritmetični zaporedji  $\{73 + 96n\}_{n=0}^{\infty}$  oziroma  $\{26 + 32n\}_{n=0}^{\infty}$ .

### Kje se je Vega zmotil?

Seveda nas po vsem tem najbolj zanima, kje je Vega naredil napako, ko je računal  $\pi$  po formuli (4) in združeval po dva in dva člena obeh številskih

vrst, da je bilo le 126 decimalk, objavljenih v [10], pravilnih. Vega je bil zelo zaverovan vase in je bil trdno prepričan, da jih je vseh 140 pravilnih. Računal je na 143 decimalk zaradi nujnih napak na zadnjih decimalkah. Pravilno je ocenil, da računanje na 143 decimalk zadošča za točnost končnega rezultata na 140 decimalk. Na srečo so se ohranili izvirni Vegovi rokopisi v Sankt Peterburgu, da lahko spremljamo, kako je računanje potekalo. Danes pa lahko s Hafnerjevim prispevkom [4] rekonstruiramo račune in primerjamo celo posamezne številke.

1. Če bi Vega vse člene pravilno izračunal na 143 decimalk in jih pravilno seštel, potem bi njegov končni približek za  $\pi$  imel točnih 140 decimalk.
2. Faktorji, ki jih je označil z  $a, b, c, \dots, a', b', c', \dots, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots, \mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}', \dots, \mathcal{A}'', \mathcal{B}'', \mathcal{C}'', \dots, \mathcal{A}''', \mathcal{B}'''$ , so vsi izračunani točno.
3. Pri izračunu členov  $\alpha_n$ , ki izvirajo iz razvoja števila  $\arctg(1/7)$  v vrsto, so tri napake, kot je razvidno iz zadnjih decimalk (podčrtane so vse od prve napačne do 143. decimalke):

$$\begin{aligned} \alpha_{15} = 1513q : (61 \cdot 63) & - 19670 \ 44692 \ 877\underline{22} \ 758 \\ & \text{pravilno je} - 19670 \ 44692 \ 87748 \ 779 \\ \alpha_{28} = 2761e' : (113 \cdot 115) & - 42931 \ 91365 \ 80104 \ 272 \\ & \text{pravilno je} - 42931 \ 91365 \ 80104 \ 273 \\ \alpha_{35} = 3433m' : (141 \cdot 143) & - 45446 \ 20351 \ 379\underline{48} \ 145 \\ & \text{pravilno je} - 45446 \ 20351 \ 37848 \ 145 \end{aligned}$$

Največja napaka, ki je vplivala na končni rezultat, je pri členu  $\alpha_{35} = 3433m' : (141 \cdot 143)$ , ki je izračunan natančno na 137 decimalk. Morda je ta napaka nastala pri prepisovanju. Vsota vseh izračunanih členov  $\alpha_n$  je prav tako točna na 137 decimalk. Namenoma je tu pri računanju členov ohranjena Vegova oznaka : za deljenje. Danes bi raje uporabljali znak /.

4. Pri členih  $\beta_n$ , ki jih je največ in ki izvirajo iz razvoja števila  $\arctg(1/3)$  v vrsto, pa je kar pet napak:

$$\begin{aligned} \beta_{19} = 634\mathcal{V} : (77 \cdot 79) & - 61\underline{142} \ 68618 \ 67865 \ 852 \\ & \text{pravilno je} - 61308 \ 72268 \ 19370 \ 044 \\ \beta_{21} = 698\mathcal{X} : (85 \cdot 87) & - 22686 \ 62420 \ 75978 \ 33\underline{7} \\ & \text{pravilno je} - 22686 \ 62420 \ 75978 \ 038 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \beta_{31} = 1018\mathcal{H}' : (125 \cdot 127) & - \underline{26130\ 60835\ 14012\ 730} \\ & \text{pravilno je} - 26130\ 60835\ 14012\ 739 \\ \beta_{32} = 1050\mathcal{I}' : (129 \cdot 131) & - \underline{75889\ 04449\ 02759\ 167} \\ & \text{pravilno je} - 75889\ 04449\ 02759\ 168 \\ \beta_{64} = 2074\mathcal{R}'' : (257 \cdot 259) & - \underline{83017\ 73790\ 19075\ 570} \\ & \text{pravilno je} - 83017\ 73790\ 19075\ 569 \end{aligned}$$

Bistvena napaka je pri členu  $\beta_{19} = 634\mathcal{V} : (77 \cdot 79)$ , ki je izračunan točno le na 127 decimalk. Isto velja za vsoto vseh izračunanih  $\beta_n$ .

5. Ko nazadnje po (10) oba dela seštejemo in pomnožimo z 8, dobimo točnih le 126 decimalk. Vegov izračun se konča z

$$\begin{aligned} & - \underline{44767\ 21386\ 11733\ 136}, \\ \text{če se ne bi motil, bi po [4] dobil} & - 46095\ 50582\ 23172\ 072, \\ \text{pravilne decimalke števila } \pi & - 46095\ 50582\ 23172\ 535. \end{aligned}$$

Toda Vega je najbrž sam ugotovil napako in leta 1794 v dodatku k svoji *Popolni zakladnici logaritmov* [11, str. 633] objavil število  $\pi$  na 140 decimalk, od katerih pa so zadnje štiri spet napačne. Zakaj?

1. Izhajal je iz formule (6) in uporabil (11). Vsoto vseh izračunanih  $\alpha_n$  je vzel kar iz prvega računa in dobil pravih 136 decimalk 40-kratnika te vsote.
2. Člene  $\gamma_n$  in  $\delta_n$ , ki izvirajo iz razvoja  $\arctg(3/79)$  v vrsto, je računal na 144 decimalk, vsoto vseh izračunanih  $\gamma_n$  je dobil natančno na 139 decimalk, vsoto vseh izračunanih  $\delta_n$  pa natančno na 142 decimalk. Ko je  $\pi$  izračunal po (11), je dobil 136 točnih decimalk števila  $\pi$ .

$$\begin{aligned} & - 46095\ 50582\ \underline{26136\ 4112}, \\ \text{če se ne bi motil, bi po [5] dobil} & - 46095\ 50582\ 23172\ 4568, \\ \text{pravilne decimalke števila } \pi & - 46095\ 50582\ 23172\ 5359. \end{aligned}$$

Žal pa nimamo na razpolago rokopisa, da bi lahko primerjali Vegove decimalke z rekonstrukcijo, ki jo najdemo v [5]. Rezultat iz [11] so ponatisnili še 15 let po Vegovi smrti v njegovem učbeniku. Ker boljšega približka za  $\pi$  tisti čas še ni bilo, nihče pravzaprav ni vedel, katere decimalke od 126. naprej so pravilne. Ker Vega ni izračunal števila  $\pi$  po formulah (4) in (6)

neodvisno, ampak je delni rezultat iz ene uporabil v drugi, se ne moremo strinjati s trditvijo, ki jo lahko preberemo na več mestih, da je rezultat po eni formuli preveril z rezultatom po drugi. Kljub vsemu pa je bil njegov rezultat iz leta 1794 najboljši objavljeni rezultat vse do leta 1841, ko je William Rutherford (1798–1871) objavil v [9] približek števila  $\pi$  na 152 pravih decimalah. V zvezi s tem Rutherfordovim približkom se pogosto pojavlja tudi letnica 1824. Avtorjema je kljub trudu na podlagi dostopnih virov ni uspelo upravičiti. Morda je Rutherford res izračunal število  $\pi$  leta 1824 in rezultat šele po 17 letih poslal v objavo. Upoštevamo lahko samo datum objave. Preseneča pa dejstvo, da je v Montuclajevem delu, katerega izsek iz leta 1802 je objavljen v [8], zapisano število  $\pi$  ravno tako na 152 pravih decimalah. Čudno je tudi to, da Straßnitzki leta 1844 v svojem dodatku takoj pod Dasejevo objavo števila  $\pi$  na točnih 200 decimalah sploh ne omenja Rutherforda, omenja pa na primer Vego.

Avtorja se iskreno zahvaljujeta prof. Tomažu Pisanskemu, ki je za 250. obletnico Vegovega rojstva priskrbel kopije originalnih listov, ki jih je bil Vega leta 1789 poslal akademiji v Sankt Peterburgu.

## LITERATURA

- [1] P. Eymard in J-P. Lafon, *The Number  $\pi$* , AMS, Providence, Rhode Island, 1999.
- [2] I. Hafner, *Euler's Estimate of Pi*, <http://demonstrations.wolfram.com/EulersEstimateOfPi/>, 2013.
- [3] I. Hafner, *Newton's Pi Approximation*, <http://demonstrations.wolfram.com/NewtonsPiApproximation/>, 2013.
- [4] I. Hafner, *Vega's Calculation of Pi*, <http://demonstrations.wolfram.com/VegasCalculationOfPi/>, 2013.
- [5] I. Hafner, *Vega's Second Calculation of Pi*, <http://demonstrations.wolfram.com/VegasSecondCalculationOfPi/>, 2013.
- [6] W. Jones, *Synopsis Palmariorum Matheseos*, London, 1706.
- [7] T. F. de Lagny, *Sur la quadrature du cercle, & sur la mesure de tout arc, tout secteur, & tout segment donné*, Histoire de l'Académie royale des sciences (1719), 135–145, Paris 1721.
- [8] M. Razpet, *Več kot 150 decimalnih krožne konstante pred letom 1800*, Obzornik za matematiko in fiziko **60** (2013), 129–136.
- [9] W. Rutherford, *Computation of the ratio of the diameter of circle to its circumference to 208 places of figures*, Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1841, 281–283.
- [10] G. Vega, *Détermination de la demi-circonférence d'un cercle, dont le diamètre = 1, exprimée en 140 figures décimales*, Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae **IX** (1791), Sankt Peterburg, 1795.
- [11] G. Vega, *Thesaurus logarithmorum completus*, Weidmann, Leipzig, 1794.
- [12] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.

# MERJENJE PREPUSTNOSTI PLASTIČNIH FOLIJ ZA SHRANJEVANJE HRANE

NINA BIZJAK, FRANCI BAJD,  
MARJETA ŠENTJURC IN IGOR SERŠA

Institut Jožef Stefan

PACS: 89.40.Dd

Za shranjevanje hrane se pogosto uporablja embalažo iz plastične folije, ki preprečuje dostop kisika in tako zavira proces kvarjenja hrane. Kljub uporabi plastične folije je hrana lahko izpostavljena kisiku, ki prehaja tako skozi stene delno prepustne folije kot tudi skozi nekakovostno zvarjene spoje. Dinamika prodiranja kisika v vrečke, izdelane iz različnih tipov plastične folije, je bila spremljana z merjenjem parcialnega tlaka kisika z elektronsko paramagnetno resonanco.

## MEASUREMENTS OF OXYGEN PERMEABILITY IN PLASTIC BAGS FOR FOOD STORAGE

Plastic bags are widely used for food storage, as they protect food from oxygenation and thus prevent its spoilage. Despite the use of this conservation technique, food may still be exposed to oxygen molecules, which may migrate through the plastic foil or its seals. Quality of various plastic foils for vacuum food conservation was tested by measuring dynamics of oxygen migration into bags made of the foils using electron paramagnetic resonance (EPR) of a material whose EPR signal is oxygen concentration sensitive.

### Uvod

Naraščajoča uporaba pripravljene in shranjene hrane vodi v vedno večje zahteve po kvalitetnih embalažnih materialih, med katerimi so najpogostejše plastične folije. Z zavijanjem hrane v folijo želimo preprečiti oziroma upočasniti kvarjenje in ohraniti svežino. Glavni dejavniki, ki vplivajo na procese kvarjenja hrane, so mikroorganizmi, vlaga, svetloba, temperatura in sestava atmosfere (zraka). Zrak je brez barve, vonja in okusa, zato na njegov pomen pri kvarjenju hrane pogosto pozabimo. Komponenta zraka, ki najbolj pospeši kvarjenje hrane, je kisik, ki vpliva predvsem na kvarjenje maščob, barvo hrane, vitamine, okus ter druge sestavine in lastnosti hrane. Kisik namreč ustvarja ugodne razmere za rast mikroorganizmov, vključen pa je tudi pri razgradnji komponent s pomočjo encimov in povzročanju oksidativnega stresa [1]. Oksidativni stres je povezan z nastankom spojin reaktivno vezanega kisika, med katerimi so najpomembnejši prosti radikali, ki sprožijo peroksidacijo lipidov in žarkost hrane. Obdelava hrane pred pakiranjem, kot

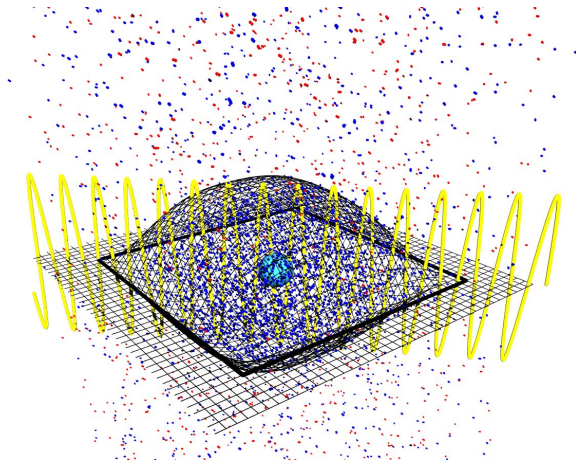
je rezanje ali sekljanje, njeno občutljivost za delovanje prostih kisikovih radikalov še poveča [2]. Pomen pakiranja hrane v embalažo, kot je folija, je med drugim ravno preprečevanje dostopa kisika. Plastična folija je tanka plast plastike, ki se lahko oprime mnogih gladkih površin in ostaja v tesnem stiku s površino brez uporabe dodatnih sredstev za lepljenje. Plastične mase za izdelavo folij imajo lahko različno sestavo in lastnosti, lahko so enoslojne ali večslojne [3]. S kombinacijo različnih plastičnih mas v večplastno kombinirano folijo lahko proizvajalci plastične embalaže danes načrtujejo material s povsem določenimi lastnostmi, kot so elastičnost, prosojnost, prepustnost za določene pline, trdnost, debelina in temperaturna občutljivost. V preteklosti so bile folije najpogosteje izdelane iz polivinilkloridov (PVC), ki pa lahko vsebujejo zdravju škodljive snovi [2]. Sodobne raziskave so usmerjene v iskanje novih materialov oziroma kombinacij materialov (npr. polietilen, polipropilen, najlon, SARAN), ki bi shranjevanje živil optimizirali ter bili ob tem biorazgradljivi [4], pri čemer pa zahteve po nekaterih osnovnih lastnostih materiala ostajajo – med njimi je ena najpomembnejših ravno čim manjša prepustnost za kisik. V naši raziskavi smo se osredotočili na učinkovitost plastičnih folij različnih proizvajalcev pri preprečevanju dostopa kisika do živila.

### Priprava vzorcev

V študiji so bili uporabljeni trije različni tipi komercialno dostopne plastične folije, in sicer folija za domačo uporabo debeline  $100\ \mu\text{m}$  (A) in  $50\ \mu\text{m}$  (B) ter profesionalna folija debeline nad  $100\ \mu\text{m}$  (C), iz katerih so bile z uporabo varilnika folije izdelane plastične vrečke kvadratne oblike z dolžino stranice  $41,2 \pm 4,7\ \text{mm}$ . V vrečke je bil dodan prah litijevega ftalocianida za spremljanje parcialnega tlaka kisika  $p\text{O}_2$ , vrečke pa so bile v kontrolirani dušikovi atmosferi zavarjene v nadtladne blazinice. Uporabili smo dva različna varilnika folije (Reber, Italija; Hyundai, J. Koreja). Prepustnost plastičnih folij in kakovost varilnega spoja sta bila ovrednotena z dinamičnim spremljanjem parcialnega tlaka kisika  $p\text{O}_2$  z elektronsko paramagnetno resonanco (slika 1). Za vsak tip folije so bile opravljene vsaj tri ponovitve merjenja  $p\text{O}_2$ .

### Elektronska paramagnetna resonanca

Elektronska paramagnetna resonanca (EPR) je spektroskopska metoda, s katero proučujemo paramagnetne centre v snovi in prek njih njihovo neposredno okolico in dogajanje v njej. Paramagnetni centri so atomi, ioni in molekule, pri katerih elektroni niso združeni v pare z nasprotnim spi-



**Slika 1.** Shema eksperimenta. V vrečke, nadtlučno napolnjene z dušikom, je med inkubacijo na zraku preko sten in preko zvarov prehajal tudi kisik, ki se je vezal na kristal litijevega ftalocianida. Dinamika parcialnega tlaka kisika je bila spremljana z metodo EPR.

nom (nesparjeni elektroni), zato je njihov skupni magnetni moment različen od nič. Paramagnetne snovi so bodisi že prisotne v snovi (prosti radikali, ioni prehodnih elementov) ali pa jih dodamo vzorcu in rabijo kot neke vrste sonda za opazovanje dogajanj v njihovi okolici. Če damo tako snov v magnetno polje, magnetni moment nesparjenih elektronov interagira s tem poljem, kar ima za posledico, da se elektroni razporedijo v spinska stanja z različno energijo

$$E = \beta g B m_S,$$

kjer so  $\beta$  Bohrov magneton (konstanta),  $g$  spektroskopski cepitveni tenzor, ki opisuje interakcijo med magnetnim momentom elektronov in magnetnim poljem in je odvisen od položaja paramagnetne molekule glede na magnetno polje,  $m_S$  projekcija spina glede na magnetno polje (za spin elektrona  $S = 1/2$  je  $m_S = 1/2$  ali  $m_S = -1/2$ ) ter  $B$  magnetna poljska gostota.

Z elektromagnetnim valovanjem z energijo, ki je enaka energijski razliki med spinskimi stanji (rezonančni pogoj)  $h\nu = \beta g B$  ( $h$  je Planckova konstanta in  $\nu$  je frekvenca mikrovalov), povzročimo prehode elektronov iz enega energijskega stanja v drugo, kar ima za posledico absorpcijo elektromagnetnih valov. Z metodo EPR pri konstantni frekvenci elektromagnetnega valovanja spreminjamo magnetno poljsko gostoto in merimo, kdaj pride do absorpcije in obliko absorpcijske krivulje, ki je odvisna od interakcije paramagnetnega centra z okolico (drugi paramagnetni ioni, električno

polje, ki ga ustvarjajo okoliške molekule, jedra atomov v paramagnetnem centru, itd). Za meritve koncentracije kisika je pomembna širina absorpcijske črte, na katero vpliva čas, ki ga elektroni preživijo v višjem energijskem stanju (relaksacijski čas). Čim daljši je relaksacijski čas, ožja je absorpcijska črta.

EPR oksimetrija temelji na dejstvu, da je kisik paramagneten (v osnovnem stanju tvorita nesparjena elektrona kisika tripletno stanje s spinom  $S = 1$ ). V vzorec dodamo kak paramagnetni marker, občutljiv za kisik, v našem primeru litijev ftalocianid, katerega absorpcijsko krivuljo merimo. Kisik učinkuje na paramagnetni marker, med njima pride do izmenjalnih interakcij, elektroni se hitreje vračajo v osnovno stanje in absorpcijska črta paramagnetnega centra se razširi. Širina črte je sorazmerna koncentraciji kisika v vzorcu (slika 2)

$$\Delta B = \Delta B_0 + KC.$$

Pri tem so  $\Delta B$  izmerjena širina črte,  $\Delta B_0$  širina črte brez prisotnosti kisika,  $K$  konstanta, ki pomeni verjetnost, da bo prišlo pri trku med paramagnetnim markerjem in kisikom do relaksacije, ter  $C$  koncentracija kisika v vzorcu.

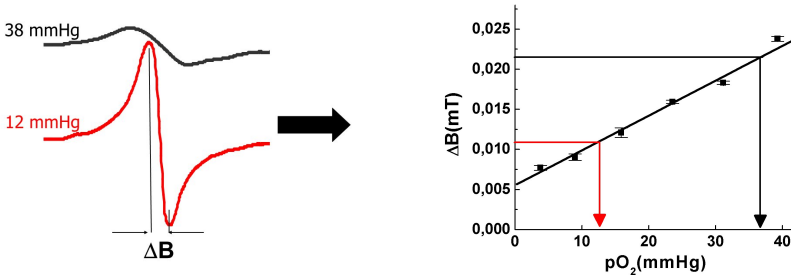
Koncentracijo kisika v vzorcu izračunamo s pomočjo umeritvene krivulje med širino črte in znano koncentracijo kisika v vzorcu. Ker je zveza linearna, je umeritvena krivulja za litijev ftalocianid podana z enačbo

$$\Delta B(mT) = 0.0059 + 3,9 \times 10^{-4} \times pO_2(mmHg).$$

Ker je koncentracija kisika v vzorcu odvisna od topnosti, ki je v heterogenih vzorcih lahko različna, podajamo količino kisika v vzorcih s parcialnim tlakom ( $pO_2$ ). Koncentracija kisika je enaka produktu med parcialnim tlakom kisika in njegovo topnostjo.

## Rezultati in diskusija

Na sliki 3 je prikazan časovni potek parcialnega tlaka kisika  $pO_2$  za tri različne tipe plastičnih folij: za srednje debelo ( $100 \mu m$ , A), tanjšo ( $50 \mu m$ , B) in debelejšo folijo ( $> 100 \mu m$ , C). S slike se nazorno vidi, da se je delež kisika v prvotno dušikovi notranji atmosferi v vrečki postopno povečeval v vseh vzorcih. Pri tanjših folijah (A,B), kjer je parcialni tlak kisika dosegel maksimalno vrednost (med 170 in 200 mmHg) že po 5 dneh od izdelave plastičnih vrečk, je bila dinamika prehajanja kisika hitrejša kot pri debelejših folijah (C). Pri slednjih parcialni tlak kisika ni dosegel končne vrednosti niti



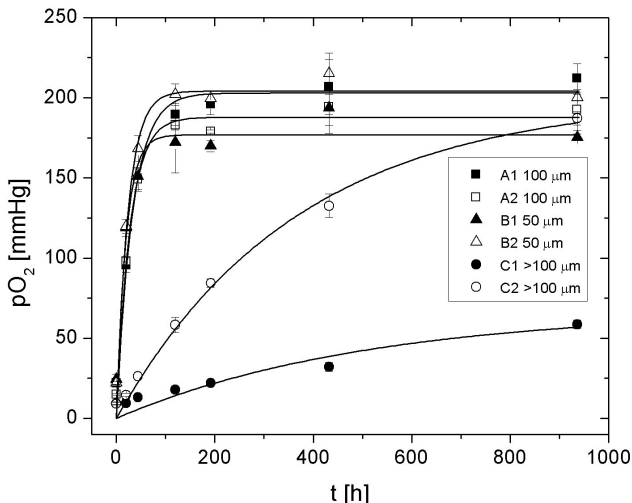
**Slika 2.** EPR spektra litijevega ftalocianida pri dveh različnih koncentracijah  $O_2$  (levo) in umeritvena krivulja za litijev ftalocianid (desno).

po 40 dneh od izdelave. Dinamika prodiranja kisika v notranjost zavarjene vrečke je bila odvisna tudi od izbire varilnika folije; največja razlika med obema varilnikoma se je pokazala pri vrečkah iz debelejšje folije, kjer je bila dinamika naraščanja parcialnega tlaka kisika počasnejša pri uporabi profesionalnega varilnika folije (A1, B1, C1) kot pri uporabi neprofesionalnega varilnika (A2, B2, C2). Časovni potek naraščanja parcialnega tlaka kisika v zavarjeni vrečki dobro opisuje modelna funkcija,

$$pO_2(t) = pO_{2,max} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right),$$

kjer sta  $pO_{2,max}$  maksimalna vrednost parcialnega tlaka kisika in  $\tau$  karakteristični čas dinamike prodiranja kisika v notranjost zavarjene vrečke. Črte na sliki 3 prikazujejo modelno funkcijo pri optimalnih parametrih prilaganja.

Razloga za naraščanje parcialnega tlaka kisika  $pO_2$  v notranjosti zavarjene vrečke sta dva, in sicer tako možno prehajanje zraka skozi površino folije v notranjost vrečke kot tudi bolj verjetno prehajanje zraka v notranjost vrečke skozi nekakovostno zvarjene spoje. Pri tanjših vrečkah je bilo prehajanje kisika desetkrat hitrejšje kot pri kakovostnejši debelejši vrečki, saj je pri debelejših vrečkah verjetnost za prehajanje zraka skozi samo folijo manjša kot pri tanjših vrečkah, predvsem pa debelina folije vpliva na kakovost spoja. Ker varjenje vrečk poteka z lokalnim pregrevanjem folije, je kakovost spoja lahko precej boljša pri debelejših vrečkah. Pri tanjših folijah čezmerno pregrevanje lahko povzroči razpad varjene folije na mestu varjenja na dva dela, kakovost spoja pa se zaradi tega znatno zmanjša, kar se kaže na znatno krajših karakterističnih časih prodiranja zraka v notranjost nekakovostno zavarjene vrečke. Pri vrečkah iz tanjše folije sta bila karakteristična časa v območju nekaj deset ur, pri vrečkah iz debelejšje folije pa je



**Slika 3.** Časovni potek parcialnega tlaka kisika v zaprtih plastičnih vrečkah, zvarjenih iz treh različnih tipov folij.

bil karakteristični čas znatno večji (slika 4).

Pri pakiranju živil bodo ta zasedala različne prostornine in tudi površina vrečke ne bo vedno enaka. Tadva parametra namreč odločilno vplivata na dinamiko prodiranja kisika v embalažo in s tem tudi določata trajanje živila. Vzemimo, da pri pakiranju zaseda živilo prostornino  $V$  in da ga obdaja folija s površino  $S$ . Prehajanje kisika skozi folijo podaja enačba

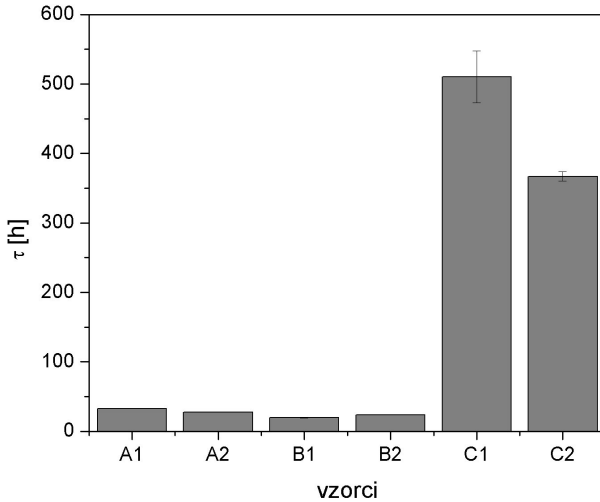
$$\frac{dN}{dt} = S j_N,$$

kjer je razlika gostote tokov molekul kisika v embalažo in iz nje  $j_N$  sorazmerna razliki koncentracij kisika zunaj embalaže  $c_0$  in v embalaži  $c$ ,

$$j_N = j_0 \left( 1 - \frac{c}{c_0} \right).$$

Tu je  $j_0$  največja gostota toka kisika v embalažo, ki je dosežena na začetku, ko v embalaži še ni kisika. Privzamemo lahko tudi, da je koncentracija kisika zunaj embalaže  $c_0$  ves čas konstantna, medtem ko se koncentracija kisika v embalaži  $c$  spreminja. Obe enačbi lahko sedaj združimo in še upoštevamo, da je koncentracija kisika v embalaži enaka  $c = N/V$ , ter tako dobimo





Slika 4. Vrednosti karakterističnega časa  $\tau$ .

empirično enačbo za spreminjanje koncentracije kisika v embalaži

$$\frac{dc}{dt} = \frac{S}{V} j_0 \left( 1 - \frac{c}{c_0} \right),$$

katere rešitev je enaka

$$c(t) = c_0 \left( 1 - e^{-\frac{S j_0}{V c_0} t} \right).$$

Očitno ta rezultat ustreza zgoraj zapisani modelni funkciji in lahko vidimo tudi, da je parameter  $\tau$  enak

$$\tau = \frac{V c_0}{S j_0}.$$

Torej je očitno res, da na dinamiko prodiranja kisika v embalažo poleg lastnosti embalaže, ki jih podaja parameter  $j_0$ , močno vpliva tudi razmerje med volumnom in površino embalaže  $V/S$ .

Dinamika prodiranja kisika v embalažo pa je vseeno nekoliko drugačna od te, ki jo podaja zgornja enačba, če je v embalaži tudi zapakirano živilo. Živilo bo namreč porabilo praktično ves prepuščen kisik za kemijske reakcije, ki bodo po večini vodile do njegovega propada. Torej lahko predpostavimo,

da je v embalaži z živilom ves čas koncentracija kisika enaka nič ( $c = 0$ ), tako da je  $j_N = j_0$ , ter da obstaja za vsako živilo neka zgornja meja količine kisika, ki jo to še lahko porabi, preden se pokvari. Denimo, da je ta meja enaka  $N_{max}$  oziroma njej pripadajoča ustrezna koncentracija je enaka  $c_{max} = N_{max}/V$ . Ta koncentracija bo v živilu dosežena po času

$$c_{max} = \frac{N_{max}}{V} = \frac{j_0 S t_{max}}{V}.$$

Iz te zveze sledi, da je maksimalni čas trajanja vakuumsko pakiranega živila določen z enačbo

$$t_{max} = \frac{V}{S} \frac{c_{max}}{j_0} = \tau \frac{c_{max}}{c_0}.$$

Trajanje živila tako določa razmerje med zgoraj določenim karakterističnim časom  $\tau$  ter razmerjem med koncentracijo v živilu porabljenega kisika, ki je vodila do njegovega pokvarjenja, ter koncentracijo kisika v okoliškem zraku. Izpeljana enačba izhaja iz predpostavke, da so zvari folije idealni in torej kisik ne prehaja skozi. Ta predpostavka pa v praksi ni nikoli dobro izpolnjena, saj je prehajanje kisika skozi zware močno odvisno od primernosti folij za varjenje in kvalitete varilnika folij.

### Sklep

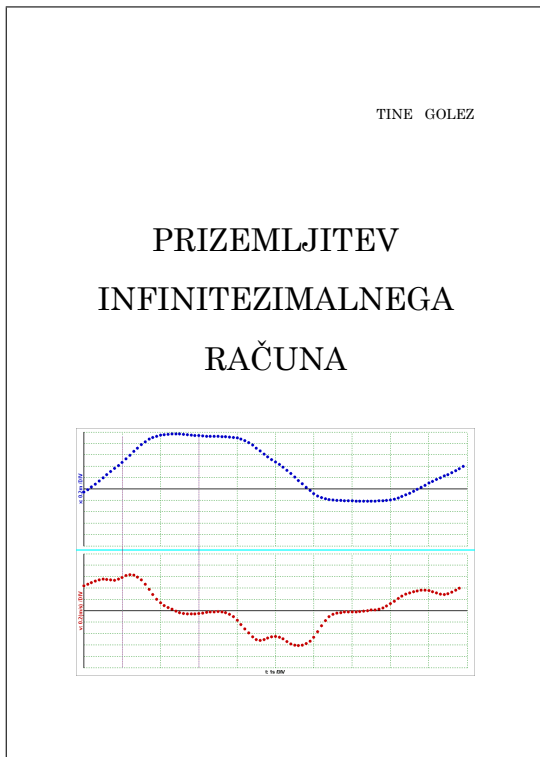
V študiji smo z uporabo EPR preverili spreminjanje parcialnega tlaka kisika  $pO_2$  v notranjosti vrečk, ki so bile v kontrolirani dušikovi atmosferi zavarjene iz različnih tipov plastičnih folij. Glavna ugotovitev študije je, da se sicer parcialni tlak kisika sčasoma poveča prav v vseh tako zavarjenih vrečkah za shranjevanje živil, je pa ta dinamika močno odvisna od debeline folije kot tudi od tipa varilnika folije. Prehajanje zraka v notranjost zavarjene vrečke poteka predvsem skozi zavarjene spoje, ti pa so mnogo kakovostnejši pri debelejših vrečkah. Z izbiro primerno debelih folij in profesionalnih varilnikov folij, ki omogočajo varjenje bolj tesnih spojev, bo hrana ostala kakovostna dlje časa, kar je tudi namen shranjevanja živil s tovrstno tehniko pakiranja.

### LITERATURA

- [1] K. J. Davies, *Oxidative stress: the paradox of aerobic life*, Biochem. Soc. Symp. **61** (1995), 1–31.
- [2] P.-W. S. Chum et al., *Method of packaging food products*, U. S. Patent 5427807 (1995).
- [3] B. Ručman, *Spremembe vsebnosti antioksidantov v pakiranem sveže narezanem zelju*, diplomsko delo, Univerza v Ljubljani (2008).
- [4] M. Kim in A. L. Pometto, *Food Packaging Potential of Some Novel Degradable Starch-Polyethylene Plastics*, J. Food. Prot. **57** (1994), 1007–1012.

**Tine Golež, Prizemljitev infinitezimalnega računa, Zavod sv. Stanislava, Ljubljana 2012, 64 str.**

Ta zanimiva knjiga razširja vsebine, predstavljene v avtorjevem članku [1] v tej reviji in v nekaterih drugih objavah. Prinaša ilustracijo uporabe matematičnih orodij, kot so vrste, odvod in integral na primerih iz fizike. Marsikaj je „prizemljeno“ v smislu, da sloni na eksperimentalnih podatkih, pridobljenih z enostavnimi ali bolj zapletenimi meritvami. Začne z nihalom, spremljanim z ultrazvočnim slednikom, priključenim na računalnik. Slednik beleži v kratkih časovnih presledkih lego nihala in nariše ustrezne točke. Program v računalniku lahko numerično izračuna hitrost in pospešek nihala, dijaki pa lahko iz natiskane upodobitve gibanja določijo parametre in enačbo sinusnega nihanja, jo odvajajo in primerjajo z računalniško dobljenimi slikami. Malo bolj zahtevna je obravnava odskakovanja žoge.



Zelo dobra je obravnava oblike kokošnjega jajca. Naj povem, da imajo taki računi očitno tudi praktično vrednost. V nedavno v slovenščino prevedeni knjigi [2] je navedenih nekaj člankov na to temo, objavljenih v resnih revijah (v agronomski *Poultry Science* in v ornitološki reviji *Auk*). Jajca so bolj ali manj vrtenine, tako da nas zanima presek jajca z ravnino skozi os rotacijske simetrije. Knjiga za obliko tega preseka vzame krivuljo z enačbo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2(1 - cx)}{b^2(1 + cx)} = 1.$$

Tu je 2a daljša os jajca. Ta formula je nekoliko bolj zapletena od podobne v [2], a na prvi pogled tudi bolj primerna za kokošje jajce. Knjiga pokaže, kako z GeoGebro in s premikanjem drsnikov – se pravi z ročno spretnostjo – določimo parametra  $b, c$  modificirane elipse, ki se kar najbolje prilega eksperimentalnim podatkom.

Kot ilustracijo ekstremov knjiga obravnava maksimalni dometa topa – igračke, ki strelja na višjo ali nižjo ravnino od tiste, na katero je postavljen (brez upoštevanja zračnega upora). Imamo tudi računanje optimalne debeline izolacije hiše, primer iz elektrostatike, optimalno obremenitev sončne celice ... Zanimivo je, da avtor mnoge enačbe zelo hitro izpelje z zdravo pametjo ali „ugane“ s primerjavo dimenzij – in večkrat šele nato uporabi standardne izpeljave iz fizikalnih zakonov. Prav tako avtor izračuna kinetično energijo vrteče se palice tako, da jo razdeli na veliko število koščkov, sešteje posamezne prispevke in nazadnje požene število koščkov v neskončnost – kar je ilustracija definicije integrala. Podoben pristop je uporabljen še na nekaj mestih, seveda pa je dodana tudi mnogo krajša pot z integriranjem.

Zapletenejša sta padanje kroglice v detergentu in strel z zračno puško v vodo. Tu je bila uporabljena hitroslikovna kamera. Z digitalno tehniko so tovrstne kamere, včasih rezervirane za najboljše opremljene laboratorije, postale dostopne običajnemu žepu (če nimamo prevelikih zahtev glede ločljivosti). Podatke s slik je treba vnesti v ustrezen program – avtor uporablja program LoggerPro (zastonj za 30 dni) – ki podatke ponazori. Fizika nam da enačbe gibanja, v katerih pa ne poznamo nujno nekaterih parametrov. Z metodo, imenovano *regresija*, ki je vgrajena v program, lahko določimo vrednosti teh parametrov, pri katerih rezultati najmanj odstopajo od eksperimentalnih podatkov (po kriteriju najmanjših kvadratov). Od tod lahko določimo viskoznost detergenta v prvem primeru in koeficient  $c$  upora izstrelka v vodi v drugem primeru.

Knjižica je dobro in skrbno napisana in bo prišla prav vsem profesorjem fizike ter za fiziko in matematiko nadarjenim dijakom zadnjega letnika gimnazije. Priporočam jo vsem, ki bi radi zaposlili in motivirali take dijake.

## LITERATURA

- [1] T. Golež, *Infinitesimalni račun med matematiko in fiziko – nove povezave, ki jih omogoča sodobni merilni sistem*, *Obzornik mat. fiz.* **54** (2007), 194–201.
- [2] J. A. Adam, *Matematični sprehodi v naravo*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2012, str. 266.

*Peter Legiša*

## STROKOVNO SREČANJE IN 65. OBČNI ZBOR DMFA, BLED, 15. IN 16. 11. 2013

Zaradi 140. letnice rojstva dr. Josipa Plemlja smo se odločili, da strokovno srečanje in občni zbor priredimo na Bledu v hotelu Golf. Vremenska napoved ni bila obetavna, saj je bil napovedan sneg do nižin. Na srečo se je meja sneženja dvignila in po deževnem petku je v soboto posijalo celo sonce; kot naročeno za popoldanski sprehod okrog jezera.

Strokovni del za učitelje je potekal v dveh oziroma treh sekcijah, vzporedno pa je potekalo tudi *15. slovensko srečanje o uporabi fizike*. Vseh udeležencev strokovnega srečanja je bilo okrog 120, na srečanju o uporabi fizike pa okrog 80.

Povzetke in razporede predavanj smo že v začetku novembra objavili na domači strani društva. Prav tako je bil pred srečanjem objavljen tudi urnik.

Ker so povzetki predavanj objavljeni tudi v biltenu strokovnega srečanja, navajamo le predavatelje in naslove predavanj v enakem vrstnem redu, kot so se zvrstili:

### Petek, 15. novembra 2013

#### Fizika:

- Nada Razpet: *Sprehodi ob vodi*
- Tomaž Kranjc: *Blejsko jezero in Stefanov problem*
- Janez Strnad: *Kaj slišimo pri Dopplerjevem pojavu?*
- Andrej Likar: *Izbrani sprehodi v naravo*
- Peter Sekolonik: *Obračanje in stabilizacija satelitov*
- Andrej Rutar: *Kako in zakaj naj se učitelj fizike ukvarja tudi z astronomijo*
- Boris Kham: *Toplotni tok s Sonca*
- Dunja Fabjan: *V pričakovanju kometa C/2012 S1 (ISON)*
- Andrej Guštin: *Analiza olimpijskega uspeha mladih astronomov*
- Barbara Rovšek: *Analiza primerov izbirnih nalog s tekmovanj za Stefanova priznanja in malo statistike*
- Robert Repnik, Matic Laneger: *Analiza eksperimentalnih nalog z državnih tekmovanj iz fizike za osnovnošolce*

Matematiki so dopoldan delali v eni, popoldan pa so se razdelili v dve skupini.

**Matematika A + B, dopoldan:**

- Štefko Miklavič: *Cayleyevi grafi* (vabljeno predavanje)
- Barbara Boldin: *Matematični modeli v biologiji: zgodba D'Ancone in Volterre*
- Izidor Hafner: *Demonstracije pri pouku matematike*
- Marko Razpet: *Krivulje, pridobljene iz vijačnice*

**Matematika A, popoldan:**

- Marina Rugelj: *Namesto tipkovnice in miške – lesene palice in kamni* (vabljeno predavanje)
- Darjo Felda: *Iz kota v kot*
- Zlatan Magajna, Amalija Žakelj: *Pridobivanje znanja v homogenih in v heterogenih učnih skupinah*
- Milena Strnad: *Geometrija narave – prelom v razvoju matematike 20. stoletja*
- Izidor Hafner, Marko Razpet: *Jurij Vega in 140 decimalnih krožnih konstante*
- Milan Hladnik: *Josip Plemelj in pravilni sedemkotnik*

**Matematika B, popoldan:**

- Matija Lokar: *Sanje o e-učbeniku*
- Matija Lokar: *MOOC in učitelj matematike*
- Tomaž Košir, Klara Pugelj in Aleš Toman: *Predstavitev tekmovanja iz finančne matematike*

Po odmoru je sledil 65. občni zbor. V prvem delu je dr. Anton Suhadole spregovoril o življenju in delu dr. Josipa Plemlja.

**Večerni program:**

- Andrej Guštin s sodelavci: *Astronomska delavnica*

Vreme astronomom (tudi letos) ni bilo naklonjeno, zato so se namesto opazovanju nočnega neba posvetili trenutno aktualnim dogodkom. Podrobneje so predstavili komete, njihove lastnosti, orbite itd. Posebej so se posvetili kometu ISON, ki naj bi konec novembra in v začetku decembra postal zelo svetel in razsežen. Prikazali so metode opazovanj in fotografiranja kometov in specifičnost opazovanj kometa ISON.

- Janez Žerovnik, Blaž Zmazek, Darka Hvastija, Tatjana Levstek: *Matematika na maturi – ob polnoletnosti splošne mature* (delavnica). Po kratkem zgodovinskem povzetku je sledila razprava o matematiki na maturi.
- Nada Razpet: *Geometrija z deščico in lončkom* (delavnica)

Udeleženci so risali geometrijske konstrukcije z deščico in lončkom (risanje simetral daljic, simetral kotov, pravokotnice na dano premico, konstrukcija enakostraničnega trikotnika in romba). S prepogibanjem papirja formata A4 pa so ustvarili enakostranični trikotnik, enakokraki trikotnik, deltoid in pravilni šestkotnik.

Vse tri delavnice so bile dobro obiskane, delo smo končali okrog 21.30. Ker je bil odziv dober, bomo delavnice v večernem delu pripravljali tudi v prihodnje.

### Sobota, 16. novembra 2013

Najprej smo imeli skupni del:

- Dragan Stevanović: *Kompleksni grafi in omrežja*
- Aleš Mohorič: *Fizikalni zgledi, ujeti z objektivom kamere* (vabljen predavanje)

Nato smo nadaljevali v dveh sekcijah.

#### Fizika:

- Karel Šmigoc: *Zgodba o Arhimedu in zlati carjevi kroni*
- Tine Golež: *Udarjena palica*
- Tine Golež: *Numerično reševanje diferencialne enačbe*

#### Matematika:

- Majda Škrinar Majdič: *Matematični maratoni na GESŠ Trbovlje* (vabljen predavanje)

Tema je bila za učitelje zanimiva in ob koncu predavanja se je razvila živahna razprava.

#### Spremljevalne dejavnosti:

Aktivna študentska sekcija je pripravila sprehod „Okoli Blejskega jezera z reševanjem nalog“ in voden ogled Plemljeve spominske sobe.

Izidor Hafner, Peter Legiša, Tomaž Pisanski in Marko Razpet so pripravili poster z naslovom *Baron Jurij Vega in krožna konstanta*. Na ogled je v Matematični knjižnici v Ljubljani.

## 62. občni zbor DMFA

Ker je bilo ob 17.00 prisotnih manj kot polovica članov DMFA Slovenije, se je občni zbor v skladu s 16. členom Pravil DMFA Slovenije pričel ob 17.30.

V delovno predsedstvo so bili izvoljeni: predsednik Mitja Rosina, člana Jožica Dolensek ter Peter Vencelj, zapisnikar Janez Krušič, overovatelja zapisnika Milan Hladnik in Matjaž Zaveršnik.

Mitja Rosina je poročal o strokovni ekskurziji v Gradec in o načrtovanem svetovnem letu svetlobe 2015. Slovenski prispevek k mednarodnemu letu svetlobe (in s tem k popularizaciji fizike) bo odvisen od razpoložljivih finančnih sredstev. Kontaktna oseba za Slovenijo je Marko Zgonik, pomagata mu Irena Drevenšek – Olenik ter Igor Poberaj (vsi FMF).

DMFA Slovenije kot kolektivni član EPS prejema 200 izvodov revije *Europhysics News*. Razdeljujemo jo članom, po en izvod pošiljamo slovenskim gimnazijam, neka izvodov pa je še na voljo (željo po prejemanju revije sporočite na e-naslov [tajnik@dmfa.si](mailto:tajnik@dmfa.si)).

Vse, ki jih zanimajo društvene strokovne ekskurzije, prosimo za njihove e-naslove zaradi tekočega obveščanja in za predloge naslednjih ekskurzij (poslati na [mitja.rosina@fmf.uni-lj.si](mailto:mitja.rosina@fmf.uni-lj.si)).

Boštjan Kuzman je poročal o slovenskem sodelovanju pri akciji Matematika planeta Zemlja v letu 2013 (MPE2013). Poročal je tudi o načrtih za društveno podelitev nagrad najboljšim udeležencem tekmovanj v organizaciji DMFA Slovenije za šolsko leto 2013/2014. Prireditve bo v Cankarjevem domu, verjetno 24. maja 2014. Združena bo z 10. obletnico verižnega eksperimenta, povezali bi jo lahko tudi z mednarodnim letom svetlobe.

Boštjan Kuzman je predlagal, da upravni odbor DMFA Slovenije do marca 2014 pripravi prenovu organizacije poletnih šol ter raziskovalnih dni (odprtost, participacija, sočasnost med počitnicami ...).

Zimski izobraževalni seminar „Matematika in umetnost“, bo naslednje leto 14. in 15. marca (dan števila  $\pi$ ). Strokovno srečanje in 66. občni zbor Društva matematikov fizikov in astronomov Slovenije bosta najverjetneje oktobra 2014 v Cerknem. Z izbiro Cerkna bi obeležili dvestoto obletnico rojstva slovenskega matematika, pedagoga in pisca matematičnih učbenikov viteza Franca Močnika (1814–1892).

Ugotovili smo, da je predstavitev občnega zbora na popoldanski čas ugodna, zato bomo tudi v prihodnje imeli občne zборе že v petek popoldan.

*Nada Razpet in Janez Krušič*

<http://www.obzornik.si/>



## LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 60 (2013)

številke 1–6, strani 1–240

## Članki — Articles

Rešeto za iskanje praštevilskih dvojčkov (Srečko Lampret) .....	1–3
Ponceletove krivulje (Mirko Dobovišek) .....	4–14
Sončno obsevanje in klimatske spremembe po Milankovičevem modelu (Žiga Šmit) .....	15–23
Lunenburgova leča (Marko Razpet) .....	41–50
Sagnacov pojav (Janez Strnad) .....	51–58
Konfiguracijski prostori in topološka kompleksnost (Aleksandra Franc) .....	81–91
Stereosnemanje: principi dvoušesne zaznave zvoka (Daniel Svenšek) .....	92–101
Rimsko dominantno število (Polona Pavlič, Janez Žerovnik) .....	121–128
Več kot 150 decimalk krožne konstante pred letom 1800 (Marko Razpet) .....	129–136
Na poti do novega Kelvina (Janez Strnad) .....	137–142
Josip Plemelj in pravilni sedemkotnik (Milan Hladnik) .....	161–172
$k$ -numerični zaklad matrike (Mirko Dobovišek) .....	173–182
Osnove kvantnega računalništva, 1. del (Matija Pretnar) .....	201–211
Vegovih 140 decimalk krožne konstante (Peter Legiša in Marko Razpet) .....	212–224
Merjenje prepustnosti plastičnih folij za shranjevanje hrane (Nina Bizjak, Franci Bajd, Marjeta Šentjunc in Igor Serša) .....	225–232

## Šola — School

O toplotnih strojih (Janez Strnad) .....	24–30
Entropija in nered (Andrej Likar) .....	31–34
Neverjetna verjetnost (Darjo Felda) .....	59–70
O metu krogle in metu kladiva (Janez Strnad) .....	102–109
Kaj obsega srednješolska fizika? (Aleš Mohorič) .....	143–149
Učitelj in raziskovalec (Aleš Mohorič) .....	183–187

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

**Pisma bralcev — Letters**

Koliko je enkrat manj kot 100? (Peter Prelog) .....	120–XI
Še o matematičnem izrazju v učbenikih (Marjan Hribar) .....	195–196
Odziv na pismo Petra Preloga (Irena Swanson) .....	197–198

**Vesti — News**

Zoisove nagrade in priznanja 2012 (Aleš Mohorič) .....	38–39
Matematične novice (Peter Legiša) .....	40–III
Devetnajsto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Gregor Šega) .....	74–77
Obvestilo (Andrej Likar) .....	77
Kodeks ravnanja Evropskega matematičnega društva (Peter Legiša) ...	78–80
Matematični raziskovalni tabor MARS 2013 .....	80
Vabilo (Andrej Likar) .....	VII
Bistroumi 2013 – srečanje najuspešnejših mladih matematikov, fizikov in astronomov (Boštjan Kuzman) .....	114–117
Skupna mednarodna konferenca matematičnih društev Katalonije, Slovaške, Avstrije, Češke in Slovenije CSASC 2013 (Boštjan Kuzman) .....	118–119
V spomin in poklon Mariji Munda (1932–2012) (Majda Šaus) .....	119
Strokovna ekskurzija v Gradec/Graz .....	XI
Profesor Peter Gosar – devetdesetletnik (Peter Prelovšek in Raša Pirc) .....	155–156
MARS 2013 (David Gajser) .....	157–159
ACAT poletna šola iz računske topologije (Aleksandra Franc) .....	160–XV
Dvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Marjan Jerman) .....	188–193
Interaktivne table in pouk matematike (Jurij Kovič) .....	194
Strokovno srečanje in 65. občni zbor DMFA (Nada Razpet in Janez Krušič) .....	235–238
Letno kazalo .....	239–XXIII
Novi člani v letu 2013 .....	XXIII

<http://www.obzornik.si/>

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

**Nove knjige — New books**

Fukagawa Hidetoshi, Tony Rothman: Sacred Mathematics, Japanese Temple Geometry (Jurij Kovič) .....	35–37
Luke Hodgkin, A history of mathematics, From Mesopotamia to Modernity (Jurij Kovič) .....	71–73
Timothy Gowers, Matematika, Zelo kratek uvod (Jurij Kovič) .....	110–112
Ulf Leonhardt, Thomas Philbin, Geometry and light – The Science of Invisibility (Marko Razpet) .....	112–113
Shai Simonson, Rediscovering Mathematics – You Do the Math (Marko Razpet) .....	150–151
Vasile Berinde: Exploring, Investigating and Discovering in Mathematics (Jurij Kovič) .....	152–154
Theodore G. Faticoni: The Mathematics of Infinity, A Guide to Great Ideas (Jurij Kovič) .....	199–IXX
Tine Golež, Prizemljitev infinitezimalnega računa (Peter Legiša) .....	233–234

**NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 2013<sup>1</sup>**

V letu 2013 se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 13 novih članov:

- 2397. Matej Babič
- 2398. Rok Brence
- 2399. Denis Brojan
- 2400. Ana Špela Hodnik
- 2401. Blažka Hunski
- 2402. Karin Kastelic
- 2403. Boris Kham
- 2404. Luka Komel
- 2405. Srečko Lampret
- 2406. Živa Petkovšek
- 2407. João Pita Costa
- 2408. Tadeja Pucko
- 2409. Irena Zeme

---

<sup>1</sup>Novi člani DMFA Slovenije za leto 2012 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **59** (2012) 6, stran XXIII.

## VSEBINA

Članki	Strani
Osnove kvantnega računalništva, 1. del (Matija Pretnar) .....	201–211
Vegovih 140 decimalk krožne konstante (Peter Legiša in Marko Razpet) .....	212–224
Merjenje prepustnosti plastičnih folij za shranjevanje hrane (Nina Bizjak, Franci Bajd, Marjeta Šentjunc in Igor Serša) .....	225–232
<b>Nove knjige</b>	
Tine Golež, Prizemljitev infinitezimalnega računa (Peter Legiša) .....	233–234
<b>Vesti</b>	
Strokovno srečanje in 65. občni zbor DMFA (Nada Razpet in Janez Krušič) .....	235–238
Letno kazalo .....	239–XXIII
Novi člani v letu 2013 .....	XXIII

---

## CONTENTS

Articles	Pages
The Basics of Quantum Computing, part 1 (Matija Pretnar) .....	201–211
Vega's 140 digits of the circular constant (Peter Legiša and Marko Razpet) .....	212–224
Measurements of oxygen permeability in plastic bags for food storage (Nina Bizjak, Franci Bajd, Marjeta Šentjunc in Igor Serša) .	225–232
<b>New books</b> .....	233–234
<b>News</b> .....	235–XXIII

---

**Na naslovnici:** Na levi: doprnsni kip Jurija Vege na pročelju Gimnazije Jurija Vege v Idriji (Foto: Marko Razpet); na desni: fotokopija prve strani rokopisa, ki ga je Jurij Vega 1789 poslal akademiji v Sankt Peterburg.