



- KOCKANJE IN PROMETNA GNEČA
- KAKO JE ISAAC NEWTON DOKAZAL DRUGI KEPLERJEV ZAKON?
- ZMAGA NA 16. MEDNARODNI OLIMPIJADI IZ ASTRONOMIJE IN ASTROFIZIKE



Oživljanje fotografij



→ Predstavljajte si, da se je vaša najboljša prijateljica pravkar vrnila z vznemirljivega potovanja v mesto Rim. Pokaže vam fotografije Koloseja, znamenitega amfiteatra. Med gledanjem fotografij občudujete stavbo in se sprašujete, kakšna je videti v resnici, torej, v treh dimenzijah?

Izkaže se, da fotografije vsebujejo več informacij, kot se zdi na prvi pogled. Že leta 2009 je skupina znanstvenikov Univerze v Washingtonu, Univerze Cornell in Microsoft Research iz ogromne zbirke turističnih fotografij na spletišču Flickr ustvarila 3D-modele Koloseja in še drugih turističnih znamenitosti v Benetkah in Dubrovniku. Danes smo praktično obdani z orodji, ki znajo zgraditi 3D-modele iz 2D-fotografij. Podobni algoritmi zamegljijo tudi ozadje zaslona Zoom, kadar nam je neprijetno pokazati zmešnjavo svoje sobe.

Matematika rekonstrukcije slik je bolj enostavna in hkrati bolj abstraktna, kot bi si morda predstavljali. Za rekonstrukcijo 3D-modela na podlagi fotografskih podatkov morajo raziskovalci rešiti sistem polinomskih enačb. Nekatere od dobljenih rešitev so matematično smiselne, a dajo nerealistične rezultate – kot bi kamera fotografijo obrnila na glavo. Dodatni pogoji in omejitve preprečijo, da bi se to zgodilo. Raziskovalci, ki preiskujejo matematične strukture v ozadju rekonstrukcije slik, se ves čas srečujejo z nepričakovanimi povezavami med geometrijo in algebro.

Več informacij v članku Building Rome in a Day, S. Agarwal in soavtorji, Comm. of the ACM, Vol. 54, No. 10, strani 105–112, oktober 2011.

Izvirno besedilo: *Bringing photographs to life*, Mathematical moments from the AMS. Prevod in uredba: Boštjan Kuzman. Fotografija: FeaturedPics, Wikipedia (CC BY-SA 4.0). × × ×



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 51, šolsko leto 2023/2024, številka 2

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Andrej Guštin (astronomija), Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, telefon (01) 4766 558.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: zalozba@mf.uni-lj.si

Naročnina za šolsko leto 2023/2024 je za posamezne naročnike 25,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 22,00 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 01100-6030708962.

List sofinancira Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založila Fakulteta za matematiko in fiziko

Oblikovanje Tadeja Šekoranja in Lucia Jamnik

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 900 izvodov

© 2023 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Fakulteta za matematiko in fiziko

ISSN 2630-4317 (Online), ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt. Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte zalozba@mf.uni-lj.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Oživiljanje fotografij

UVODNIK

- 4 UI je tu ...
(*Andrej Likar*)

MATEMATIKA

- 5-8 Kockanje in prometna gneča
(*Simon Čopar*)
- 28-29 GeoGebra kotiček - Geometrijska konstrukcija elipse in hiperbole
(*Boštjan Kuzman*)

FIZIKA

- 12-14 Kako je Isaac Newton dokazal drugi Keplerjev zakon?
(*Robert Hauko in Simon Špacapan*)
- 30-31 Naravoslovna fotografija - Virga - suha nevihta
(*Aleš Mohorič*)

ASTRONOMIJA

- 18-22 Zmaga na 16. mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike
(*Vid Kavčič*)
- 23-26 Sferna trigonometrija in čas v astronomiji - Naloge za bralce
(*Vid Kavčič*)

RAZVEDRILO

- 11 Križne vsote
- 15 Bilo je nekoč v reviji Presek - Nove knjige: Windows 3.1, podkrepjen z DOS 6.0
- 16-17 Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 27 Rešitev nagradne križanke Presek 51/1
(*Marko Bokalič*)

TEKMOVANJA

- 9-11 Celoletne priprave na Mednarodno matematično olimpijado
(*Luka Horjak*)

SLIKA NA NASLOVNICI: Poljski astronomi so letos praznovali 550. obletnico rojstva Nikolaja Kopernika in pripravili številne mednarodne astronomske kongrese in praznovanja. Tudi za 16. mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike se moramo zahvaliti poljskim astronomkam in astronomom, ki so jo lahko organizirali na rovaš okrogle obletnice znamenitega rojaka. V Varšavi tudi stoji impozantni Kopernikov kip. Foto: Andrej Guštin

UI je tu ...



ANDREJ LIKAR, UREDNIK ZA FIZIKO

→ Ko se je leta 1874 Max Planck odločil za študij fizike, ga je profesor fizike na muenchenski univerzi posvaril rekoč: »Študij fizike pač ni dobra izbira. Saj je v fiziki že vse raziskano, zapolniti je treba le nekaj vrzeli, ki so še ostale neobdelane. Reševal boš parcialne diferencialne enačbe in se pri tem dolgočasil«. Planck je vztrajal rekoč, da ga niti ne zanima odkrivanje novih stvari, pač pa bi rad razumel že znane osnove fizike. Takrat je prevladovalo mnenje, da je fizika mrtva veda, vse je dognano, nič novega se ne more pojaviti. Res se je Planck posvetil termodinamiki, prišel do dognanj, ki so bila že znana in se navduševal nad idejo entropije, ki pa takrat ni bila v modi, saj so številni menili, da gre le za matematično zanimivost. A zanimanje za sevanje črnega telesa ga je pripeljalo do enega največjih odkritij v moderni fiziki, kvantne mehanike, ki je še danes v žarišču raziskav. Ali je klasična, predkvantna fizika s tem postala nezanimiva? Nikakor ne, na njej temelji velik del tehnološkega razvoja prejšnjega in tega stoletja. V osnovnih in srednjih šolah ter prvih treh letnikih študija fizike je klasična fizika, ali kot pravimo fizika 19. stoletja, še vedno alfa in omega.

S hitrim razvojem računalništva je sposobnost računanja »peš«, torej le s papirjem, svinčnikom in glavo, postala le zanimivost, računalnik je premlevanje števil opravil neskončno hitreje in zanesljiveje kot človek. Vendar, »računalnik je stroj, razmišljati pač ne zna, nikoli ne bo mogel, na primer, premagati dobrega šahista«, smo se tolažili. A glej no, računalniški program »Globoka modrina« v dvoboju premaga še tako dobrega šahista. Konec šahiranja? Ne!! Šah s tem ni izgubil ničesar, še vedno ga ljudje igrajo, ga študirajo, prirejajo turnirje, saj »vidim v partiji dveh velikih mojstrov boj dveh značajev, dveh volj, dveh temperamentov, dveh živčnih sistemov«, kot pravi Milan Vidmar. »Če mojster pozablja, da se bori z živim in zato najrazličnejšim pogreškom dostopnim nasprotnikom, če zanemarja psihološke prijeme, če izračunava, kar se izračunati ne da, je po mojem mnenju bedak.« In ta Vidmarjev šah dveh mojstrov še vedno polno živi. Očitno se sicer da zmagati le z golim preračunavanjem, ki pa ga v omejenem času zmore le ultrahitri računalnik. A tudi z

navadnim računalnikom je šahiranje še kar zabavno, če ne najdemo zagretega nasprotnika.

»Računalnik moraš do pike sprogramirati in potem ti po porogramu zmelje tvoje številke in ti kot rezultat spet da le številke. Ne rečem, da to ni OK, a je računalnik kljub vsemu le malo boljši kalkulator,« me je ne tako dolgo nazaj izzival prijatelj strojnik. »Dobro, lahko tudi kaj nariše, vodi kak stroj, a v bistvu je le *orjaški bebec*.« Nekaj let pozneje sem ga povabil v svoj kabinet. »No, saj še znaš odvajati kak izraz? Pa poskusi odvajati po x tole,« in sem mu pokazal precej zapleteno funkcijo iksa. »Daj no mir, tegale pa še ti ne opraviš brez napake,« mi je odgovoril. Pa se je motil, saj sem odvod dobil v hipu s programom Derive. Torej zna računalnik računati simbolično. Zna odvajati, integrirati, poiskati limito kakega izraza, rešiti sistem enačb, poenostaviti zapleten izraz, razviti funkcijo v vrsto, v splošnem rešiti diferencialno enačbo ... Morda pa matematike sploh ne rabimo več ... Ne, ne, rabimo, rabimo, računalnik pač ne zna razmišljati ... Je pa lahko v veliko pomoč pri reševanju zahtevnih matematičnih problemov.

In nenadoma so mediji polni UI. Pojavil se je računalniški program, ki misli kot človek in vse ve. Z njim se da pogovarjati in niti ne veš, da se pogovarjaš s programom. Umetna inteligenca (UI), s katero se znanstveniki sicer ukvarjajo že desetletja, je nenadoma tu, po mnenju številnih nezmotljiva, na dosegu prstov. Umetniki se bojijo konkurence, scenaristi stavkajo, ker zna računalnik napisati scenarij za film, profesorji ne vedo, kdo je napisal seminarsko nalogo – študent ali UI, preiskovalci letalskih nesreč ugotavljajo, da se je UI borila s pilotom, ga premagala in strmoglavila letalo ... »V prihodnje bo tako tudi s človeštvom, UI ga bo ugonobila,« slišimo svarila od vsepovsod. Če bo pilot človek, kopilot pa UI, se to ne bo zgodilo.

A fizika še živi, prav tako šah in matematika. Še vedno radi hodimo peš, čeprav imamo konje, kolesa, motorje, avtomobile, letala, rakete ... In radi se vozimo s kolesi, čeprav imamo motorje ... In radi plavamo in veslamo, čeprav imamo motorne čolne, jadrnice, gliserje, ladje, katamarane ... Radi plezamo po skalah do vrhov, čeprav imamo žičnice in helikoptere. Če že ne iz nuje, pa iz čistega veselja.

In radi beremo, razmišljamo in kdaj pa kdaj sami kaj napišemo za Presek, čeprav imamo UI ...



Kockanje in prometna gneča



SIMON ČOPAR

→ **Prometna gneča je voznikom na žalost še predobro poznan pojav. Naravoslovno navdihnjeni voznik se med vožnjo v počasni koloni lahko vpraša, zakaj do gneče sploh pride in zakaj včasih kolona vozil vozi počasi, čeprav je cesta pred njo prosta. S kolikšno najvišjo hitrostjo lahko potujemo, če smo pri tem odvisni od voznih navad drugih voznikov pred nami? Pri tem ne moremo predpostaviti, da so vsi vozniki in vsa vozila enaki. Vsako jutro bomo naleteli na kolono z nekoliko drugačno hitrostjo, čeprav so dolžina kolone in vremenske razmere enake. Individualnih lastnosti vozil ne poznamo, zato jih obravnavamo kot naključne. V takih primerih raje govorimo o verjetnostnih porazdelitvah: poznati želimo verjetnost za vsako vrednost opazovane količine, ki jih imenujemo tudi *naključne spremenljivke*.**

Oglejmo si za začetek lažji primer zaporednega metanja poštene kocke, kjer je vseh šest izidov enako verjetnih. Če po več metih šteje *največje* število pik, kako se s številom metov spreminja naša verjetnost, da dosežemo šestico? Po enem metu so vsa števila pik enako verjetna, z večkratnimi meti pa vendar povečujemo verjetnosti višjih izidov. Tako opazimo, da vrstni red metov ni pomemben, vržemo lahko tudi vse kocke naenkrat.

Poskusimo zdaj na podoben način opisati še prometno gnečo v poenostavljeni obliki: vožnjo v koloni brez prehitevanja. Različna vozila in tudi posamezni vozniki vozijo različno hitro. Prvo vozilo v koloni lahko vozi, kolikor hitro želi. Če je naslednje vozilo počasnejše ali enako hitro kot tisto pred njim, potem vozi »po svoje«, če je hitrejše, pa lahko vozi le s hi-

trostjo vozila pred njim. Da ugotovimo hitrost drugega vozila, vzamemo torej *manjšo* izmed dveh hitrosti: njegove zelene hitrosti in hitrosti kolone pred njim. Kakšna je verjetnost, da zadnje od N vozil na cesti lahko vozi s hitrostjo x ?

Primeri kock in vozil sta matematično zelo sorodna – v obeh primerih imamo podano verjetnostno porazdelitev $p_1(x)$ količine x (največje število pik, hitrost kolone) za en poskus, iščemo pa porazdelitev za N poskusov. Pri tem ne gledamo povprečja vseh poskusov, ampak največjo vrednost (oziroma v primeru prometa, najmanjšo). Privzemimo, da že poznamo porazdelitev za N poskusov – recimo ji $p_N(x)$, kocko pa vmes dobro »pretresemo«, da naslednji met ni odvisen od prejšnjih. Verjetnost, da je dosedanji izid x_1 , izid zadnjega meta pa x_2 , je zaradi neodvisnosti obeh izidov kar produkt verjetnosti za predhodni in novi izid:

$$\blacksquare p(x_1, x_2) = p_N(x_1)p_1(x_2).$$

To je verjetnost le za eno kombinacijo x_1 in x_2 , pri upoštevanju novega poskusa pa je lahko rezultat x dosežen na različne načine. Upoštevati moramo vse primere, v katerih se rezultat ni spremenil, saj je novi rezultat slabši od starega, ali kvečjemu enak: $x = x_1 \geq x_2$, ter primere, v katerem je novi rezultat izboljšava starega: $x = x_2 > x_1$. Verjetnosti za vse možne pare starega izida in novega poskusa lahko izrišemo kot kvadratno tabelo, v kateri vsi pari vzdolž »kljuk« (unij dveh stranic kvadrata) prispevajo k verjetnosti za enega izmed možnih izidov. Glej sliko 1 za primer meta treh kock. Vse te prispevke moramo sešteti v skupno verjetnost,

$$\blacksquare p_{N+1}(x) = p_N(x) \sum_{k \leq x} p_1(k) + p_1(x) \sum_{k < x} p_N(k). \quad (1)$$

Obravnavajmo zdaj konkreten primer meta kock: kolikšne so verjetnosti, da pri metu šestih kock največja doseže x pik? Naša osnovna porazdelitev je v tem primeru kar $p_1(x) = \frac{1}{6}$ – enaka za vsa števila



→ pik x . Za dve kocki imajo vsi pari verjetnost $\frac{1}{36}$, dolžine »kljuk« pa so zaporedna liha števila 1, 3, 5, 7, 9, 11, torej $p_2(x) = \frac{2x-1}{36}$. Dodajmo naslednjo kocko s pomočjo enačbe 1:

$$p_3(x) = p_2(x) \sum_{k \leq x} p_1(k) + p_1(x) \sum_{k < x} p_2(k)$$

$$= \frac{2x-1}{36} \sum_{k=1}^x \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{x-1} \frac{2k-1}{36}.$$

V prvi vsoti k sploh ne nastopa – seštevamo le x enakih členov. Drugo vsoto razčlenimo na razliko dveh členov $\frac{2}{6^3} \sum_{k=1}^{x-1} k - \frac{1}{6^3} \sum_{k=1}^{x-1} 1$. Z uporabo formule za

vsoto zaporednih naravnih števil sledi:

$$p_3(x) = \frac{(2x-1)}{6^3} x + \frac{2}{6^3} \frac{x(x-1)}{2} - \frac{1}{6^3} (x-1)$$

$$= \frac{3x^2 - 3x + 1}{6^3}.$$

Vsota je ponazorjena tudi na sliki 1, kjer je bolj razviden potek seštevanja. Več kock vržemo, višja je verjetnost, da dobimo vsaj eno šestico, v tem primeru že $p_3(6) \approx 42\%$. Za šestico kot najvišje število pik bi sicer isto na lažji način lahko izračunali tudi kot nasprotje izida, da padejo tri kocke z 1-5 pikami: $p_3(6) = 1 - (5/6)^3$.

Verjetnostne porazdelitve za večja števila metov lahko dobimo rekurzivno na podoben način, vendar to hitro postane nepregledno. Namesto tega bomo splošnejši rezultat dobili s pomočjo drugačnega razmisleka. Na sliki 1 opazimo, da lahko vsako kljuko vidimo tudi kot odštevanje dveh kvadratov. Ker je vsak novi dogodek neodvisen od prejšnjih, so vnosi v tabeli kar produkti verjetnosti v stolpcih in vrsticah. To pomeni, da verjetnost, da se zgodi katerikoli dogodek v izbranem kvadratu te tabele, lahko enostavno izračunamo kot produkt dveh *kumulativnih* verjetnosti $C(x) = \sum_{k=1}^x p(k)$, ki jim rečemo tako, ker štejejo akumulirano vsoto verjetnosti vseh izidov do vključno vrednosti x . Verjetnost, da pademo v spodnji levi kvadrat s stranico x , je torej produkt verjetnosti $C_{N-1}(x)$, da predhodni rezultat $N-1$ metov kocke pade v spodnjih x vrstic (vse prehodne kocke imajo med 1 in x pik), in verjetnosti $C_1(x) = \sum_{k=1}^x p_1(k) = x/6$, da novi izid pade v prvih x stolpcih (na zadnji kocki vržemo med 1 in x pik). Skupna verjetnost, da N metov kocke doseže rezultat x je potem razlika verjetnosti, da smo v kvadratu velikosti x in verjetnosti, da smo v kvadratu velikosti $x-1$:

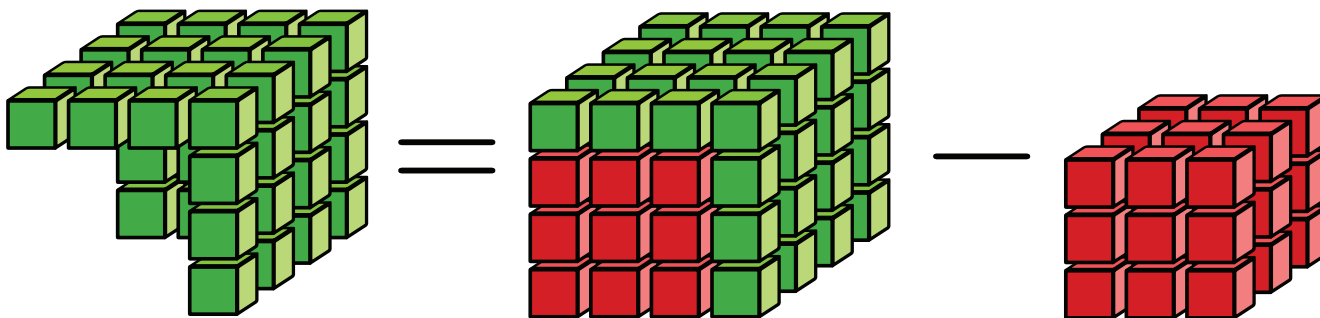
$$p_N(x) = C_{N-1}(x)C_1(x) - C_{N-1}(x-1)C_1(x-1).$$

Zgornja zveza je še vedno rekurzivna, saj zahteva izračun $C_{N-1}(x)$. Na podoben način bi za 3 dogodke namesto tabele lahko narisali *kocko* možnih izidov, »kljuko« pa bi postale razlike dveh različno velikih kock (glej sliko 2). Podobno si za N metov zamislimo kar N -dimenzionalno tabelo oziroma hiperkocko. V več kot treh dimenzijah si grafično tega ne moremo več predstavljati, še vedno pa velja, da računamo razliko dveh hiperkock, in prostornino kocke znamo izračunati v poljubnem številu dimenzij.



SLIKA 1.

Izračun porazdelitve za 3 mete kocke iz porazdelitve za 2 meta kocke. Seštevamo po poljih z isto barvo ozadja – po »kljukastih« oblikah. Zaradi zaokroževanja se verjetnosti ne seštevajo na vsa decimalna mesta natančno.



SLIKA 2.

Posplošitev »kljuka« na tri dimenzije pomaga pri izračunu verjetnosti za met treh ali več kock.

S tem razmislekom lahko verjetnost za izid x po N metih zapišemo kar kot razliko dveh hiperkock:

$$p_N(x) = C_1(x)^N - C_1(x-1)^N = \left(\frac{x}{6}\right)^N - \left(\frac{x-1}{6}\right)^N \quad (2)$$

Če iščemo najmanjše število pik, lahko uporabimo isti rezultat, če zamenjamo $6 \leftrightarrow 1, 5 \leftrightarrow 2$ itd.

S tem smo pa dobili kar splošno formulo za izid igre z N kockami v zaključeni obliki, brez dodatnih vsot. Za bralce, večje računanja s pogojnimi verjetnostmi, navedemo še alternativni način izpeljave istega rezultata. Dogodek, ko je največje število pik na kockah enako x , lahko razumemo kot presek dogodka K , da imajo vse kocke med 1 in x pik, in dogodka L , da ima vsaj ena kocka x pik. Po obrazcu za pogojno verjetnost $P(K \cap L) = P(L|K)P(K)$, moramo izračunati le verjetnost dogodka K , ki je enaka kar $P(K) = (x/6)^N$, ter pogojno verjetnost $P(L|K)$, da vidimo vsaj eno kocko z x pikami, pri čemer pa višje od x niso več na voljo. To pa je enostavno, saj je ta dogodek ravno obraten dogodku, da imajo vse kocke med 1 in $x - 1$ pik. Ker rezultat že poznamo, izračun prepuščamo bralcu.

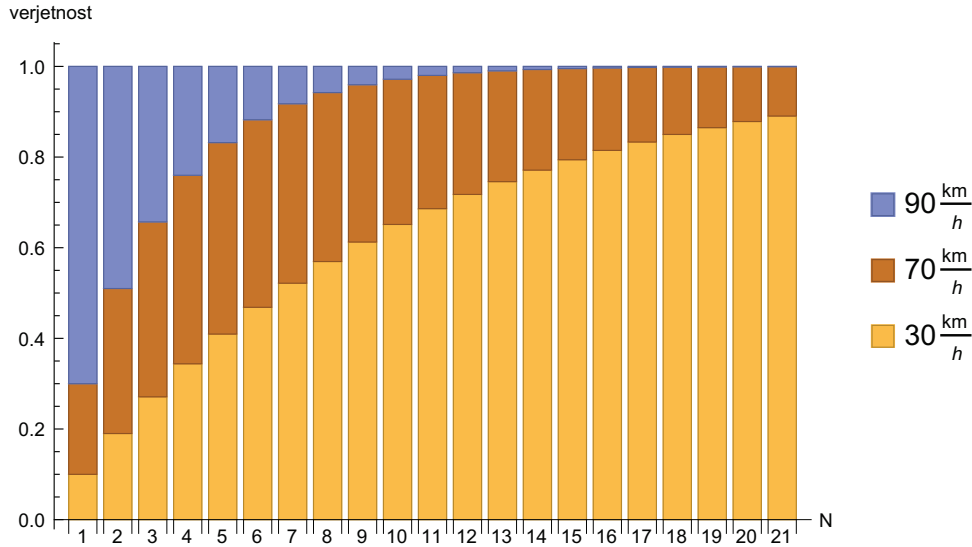
Opremljeni z idejo, kako reševati tovrstne probleme, se zdaj vrnimo še na problematiko vožnje v koloni. Vzemimo primer, ko je na cestah $p_1(A) = 70\%$ osebnih avtomobilov, ki vozijo 90 km/h, $p_1(B) = 20\%$ tovornjakov, ki vozijo 70 km/h in $p_1(C) = 10\%$ traktorjev, ki vozijo 30 km/h. Tokrat seštevamo po »kljukah« z desnega zgornjega kota navzdol, ker šteje minimalna, ne maksimalna vrednost (glej sliko 3).

Pri metu kock smo lahko dobili analitično rešitev za N metov kock s pomočjo računanja »kljuk« kot razlik dveh kvadratov in posplošitve na N -dimenzionalni problem, zato se bomo tudi pri vožnji v koloni lotili na enak način. Najlažje dobimo verjetnost, da kolona N vozil vozi s hitrostjo avtomobila – to se zgodi samo, če je vseh N vozil avtomobilov: $p_N(A) = p_1(A)^N$: to ustreza najmanjšemu kvadratu

		drugo vozilo			
					hitrost kolone
		10%	20%	70%	
prvo vozilo		7%	14%	49%	49%
		2%	4%	14%	32%
		1%	2%	7%	19%

SLIKA 3.

Verjetnosti za počasno vožnjo, če smo drugi voznik v koloni.



SLIKA 4.

Odvisnost verjetnosti za gibanje z različnimi hitrostmi od števila vozil v koloni.

desno zgoraj na sliki 3. Za verjetnost, da vozimo s hitrostjo tovornjakov, si lahko izračunamo verjetnost, da so vsa vozila bodisi avtomobili ali tovornjaki (verjetnost, da je eden izmed njih avto ali tovornjak je $p_1(A) + p_1(B) = 90\%$), ter odštejemo verjetnost, da so vsi avtomobili, kar za 2 vozili ustreza odštevanju 1×1 kvadrata od 2×2 kvadrata v tabeli, za N vozil pa dobimo

- $p_N(B) = [p_1(A) + p_1(B)]^N - p_1(A)^N$.

Preostanek verjetnosti pripada hitrosti traktorjev: $p_N(C) = 1 - [p_1(A) + p_1(B)]^N$. Slika 4 prikazuje odvisnost vseh treh verjetnosti od dolžine kolone N .

Vidimo torej, da brez prehitevanja pri večji količini vozil neizbežno pride do tega, da hitrost narekujejo najpočasnejši udeleženci v prometu, in dovolj je eden, da ustavi celo kolono. Temu ozkemu grlu se učinkovito izognemo z avtocestami, ker je zaradi več vzporednih pasov vedno na voljo možnost prehitevanja. S tem omogočimo, da vsi udeleženci v prometu lahko dosežejo svojo optimalno hitrost.

Metodi, ki smo ju uporabili, lahko posplošimo na drugačne porazdelitve. Izračun z vsotami, ki smo ga uporabili v primeru kocke, zahteva, da so verjetnostne porazdelitve take, da je vsote enostavno izvrlednotiti. Po drugi strani je način s pomočjo kumulativnih porazdelitev bolj splošen. Z računanjem verjetnosti za vedno večje kvadrate v verjetnostni tabeli

in odštevanjem verjetnosti za kvadrata sosednjih velikosti so lahko verjetnosti za posamezne vrednosti poljubne. Ta način lahko s poznavanjem diferencialnega računa uporabimo tudi za zvezne porazdelitve.

Računanje verjetnosti za največji ali najmanjši izid pri večkratnih ponovitvah pride v poštev tudi pri športu. Raznolikost v uspešnosti različnih tekmovalcev ter raznolikost rezultatov med poskusi vsakega tekmovalca se da opisati kot verjetnostno porazdelitev po rezultatih za vsak poskus. Vsakič, ko nekdo podre rekord, ima naslednji tekmovalec še težjo nalogo. Verjetnost, da je rekord res visok in težko premagljiv, se z vsakim poskusom povečuje. Na koncu opazimo, da se vedno redkeje zgodi, da je prejšnji rekord premagan. Razlika od naših kock je predvsem v tem, da pri kocki vemo, da je šestica največji možen rezultat, pri športu pa nimamo stroge zgornje meje, in vedno obstaja neničelna, čeprav zelo majhna verjetnost za še večji rezultat - sicer bi potegovanje za rekorde izgubilo smisel.

Pojav »padajočih donosov«, pri katerem potrebujemo vedno več poskusov, da dosežemo dodatne izboljšave, opazimo tudi v ekonomiji, ter v optimizaciji izkoristka strojev in naprav. Običajno moramo sprejeti kompromis in sprejeti neoptimalen rezultat, da ne žrtvujemo preveč časa ali denarja v nadaljnje izboljšave.



Celoletne priprave na Mednarodno matematično olimpijado



LUKA HORJAK

→ Že vrsto let Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira Državno tekmovanje srednješolcev v znanju matematike za Vegova priznanja, na katerem se dijaki potegujejo za zlata priznanja. A to je za najboljše tekmovalce le vrh ledene gore – skozi leta potekajo tudi izbirni procesi za mednarodna tekmovanja, na katerih se pomerijo najboljši mladi umi s celega sveta. V letošnjem šolskem letu bo potekal izbor za štiri mednarodna tekmovanja za srednješolce.



SLIKA 1.

Slovenska ekipa na 64. Mednarodni matematični olimpijadi v Chibi na Japonskem

Mednarodna matematična olimpijada (MMO) je najstarejša mednarodna olimpijada iz znanja. Njeni začetki segajo v leto 1959, ko je Romunija organizirala tekmovanje za države tedanjega vzhodnega bloka. Od takrat je bila organizirana vsako leto z izjemo 1980. Na letošnji izvedbi je sodelovalo kar 618 tekmovalcev iz 112 držav, kar je največ na tovrstnih olimpijadah. 65. MMO bo prihodnje leto gostilo mesto Bath v Veliki Britaniji, potekala pa bo med 11. in 22. julijem. V 6-člansko ekipo se bodo uvrstili tekmovalci, ki bodo na treh izbirnih testih in državnem tekmovanju zbrali največ točk.

Na Srednjeevropski matematični olimpijadi (SMO) sodeluje 10 srednjeevropskih držav. Na tekmovanje se znova uvrsti 6 tekmovalcev, ki se niso uvrstili na MMO in niso v zadnjem letniku srednje šole. S tem je udeležba na mednarodnih tekmovanjih omogočena večjemu številu dijakov, poleg tega pa služi še kot dodatna motivacija in priprava na MMO v prihajajočem šolskem letu. Prihodnjo izvedbo SMO bo konec avgusta gostilo mesto Szeged na jugu Madžarske.

Dodatno spodbudo dekletom nudi Evropska dekliška matematična olimpijada (EDMO). Olimpijada je namenjena spodbujanju deklet k udeležbi na matematičnih tekmovanjih, kot je MMO, saj tam predstavljajo le okoli 10 % tekmovalcev. Nanjo se uvrstijo najboljša štiri dekleta glede na rezultate prvih dveh izbirnih testov. Letošnjo izvedbo smo organizirali v Sloveniji, prihodnje leto pa bo tekmovalke med 11. in 17. aprilom gostila Gruzija v mestu Tskaltubo.

Zadnje mednarodno tekmovanje v znanju matematike je Romunski matematični master (RMM), ki poteka vsako leto v glavnem mestu Romunije, Bukarešti. Znano je po zelo zahtevnih nalogah. 15. RMM bo potekal med 26. februarjem in 2. marcem. Zaradi zgodnjega termina tekmovanja bosta za izbor štiričlanske ekipe štela 1. izbirni test in dodatne kvalifikacije za to tekmovanje.





Ker naloge na zgoraj naštetih olimpijadah pogosto zahtevajo znanje, ki presega srednješolski učni načrt, skozi leto organiziramo priprave na tekmovanja. Te večinoma vodimo študenti, ki smo se v preteklosti uvrstili na zgoraj naštetih tekmovanja in smo zato zelo dobro seznanjeni s koncepti, ki so potrebni za uspeh.

Priprave potekajo v obliki 4-urnih predavanj, s katerimi začnemo v oktobru, potekajo pa do konca šolskega leta. Skupaj tako organiziramo med 10 in 15 predavanj. Pri nekaterih organiziramo za tekmovalce, ki so na pripravah v preteklosti, že sodelovali še višji nivo. V preteklem šolskem letu smo obravnavali naslednje teme:

- preštevanja, načelo vključitev in izključitev, Dirichletov princip
- usmerjeni koti
- modularna aritmetika
- indukcija
- funkcijske enačbe
- potenca točke na krožnico
- polinomi
- invariante in dvojno štetje
- Menelajev, Cevov in pascalov izrek, homotetija
- neenakosti
- diofantske enačbe
- rekurzija, kombinatorne igre
- zaporedja

Na višjem nivoju so bile teme naslednje:

- teorija grafov
- izogonalna konjugiranost in simediane
- lema o dvigu eksponenta
- konstrukcije v teoriji števil
- napredne metode v funkcijskih enačbah
- inverzija
- rodovne funkcije

Na spletni strani www.dmfa.si/Tekmovanja/-MaSSA/Priprave.aspx je objavljen seznam letošnjih priprav, ki se sproti posodablja. Tam lahko najdete tudi gradiva, rezultate izbirnih testov in druge informacije o poteku priprav in tekmovanj.

Olimpijske ekipe določimo z izbirnimi testi. Vsako leto organiziramo tri teste, za to šolsko leto so predvideni datumi 16. 12. 2023, 15. 2. 2024 in 11. 5. 2024. Da so ta v izvedbi čim bolj podobna samim mednarodnim tekmovanjem, trajajo kar 4 ure

in pol, pri čemer ima prvi test 5 nalog, preostala dva pa po 3. Nekaj preteklih izbirnih testov in natančna merila izbora lahko najdete na zgornji spletni strani.



SLIKA 2.

Tekmovalke med pisanjem Evropske deklishe matematične olimpijade v Portorožu

Naloge, ki so pojavljajo na izbirnih testih in mednarodnih tekmovanjih, se zelo razlikujejo od šolskih. Pogosto morajo tekmovalci sami odkriti postopek, ki vodi do rešitve. Pri tem so jim v pomoč nekateri izreki, kot je naslednji:

Dirichletov princip: Če $n + 1$ predmetov razvrstimo v n škatel, bosta zagotovo v neki škatli vsaj dva predmeta.

Dirichletov princip je zelo enostaven koncept. Presemetljivo pa se da aplicirati na zelo zanimive načine, s katerimi lahko rešimo tudi zahtevne naloge.

Naloga: Naj bo n naravno število in $X \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ množica, za katero velja $|X| = n + 1$. Dokaži, da obstajata taki različni števili $x, y \in X$, da velja $x \mid y$ ali $y \mid x$.

Rešitev. Oglejmo si najprej, kaj se zgodi pri majhnih vrednostih števila n . Take primere je zelo lahko analizirati, pogosto pa lahko pri tem najdemo kak vzorec, ki nam pomaga pri reševanju splošnih primerov. Pri $n = 1$ seveda velja $X = \{1, 2\}$, in ker velja $1 \mid 2$, je pogoj res izpolnjen. Pravzaprav lahko opazimo še več; če velja $1 \in X$, je pogoj zagotovo izpolnjen, saj 1 deli vsako naravno število.

Križne vsote



→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	4	13			
11			11		
14				16	
		8			12
			8		
			15		



REŠITEV KRIŽNE VSOTE

7	8	15			
5	3	8			
12	5	3	8		
	9	8	5	1	14
		11	8	3	11
			13	4	

Pri $n = 2$ velja $X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Denimo, da števili x in y iz navodila naloge ne obstajata. Če velja $3 \in X$, dobimo tako pogoj $1 \notin X$, saj $1 \mid 3$. Ker pa $2 \mid 4$, je lahko v X le eno izmed teh števil. Pravzaprav smo množico $\{1, 2, 3, 4\}$ razdelili na množici $\{1, 3\}$ in $\{2, 4\}$, iz vsake izmed teh pa lahko vzamemo kvečjemu eno število. To po Dirichletovem principu ni mogoče.

Dobili smo torej idejo za splošno rešitev. Če množico $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ razdelimo na n množic, pri čemer se v vsaki množici vsa števila med seboj delijo, lahko po Dirichletovem principu najdemo taki števili x in y . Poskusimo poiskati te množice. V prvi množici naj bo število 1. Ker 1 deli vsako naravno število, dodatnih omejitev nimamo, zato lahko dodamo kar število 2. Naslednje število, ki je deljivo tako z 1 kot z 2, je 4. Če nadaljujemo na tak način, bomo v prvo množico dali natanko potence števila 2.

V drugi množici naj bo najmanjše število, ki ga še nismo uporabili - 3. Podobno kot prej ugotovimo, da je naslednje število, ki je deljivo s 3, enako 6, naslednje 12 in tako dalje. V drugi množici bodo tako natanko števila oblike $3 \cdot 2^k$ za nek $k \in \mathbb{N}_0$.

Ta razmislek lahko posplošimo - če je a najmanjše število v množici, so vsa ostala oblike $a \cdot 2^k$. V vsaki množici se tako res vsa števila delijo paroma. Preostane nam torej še to, da preštejemo, koliko množic smo s tem dobili.

Oglejmo si spet najmanjša števila v vsaki množici. Če je katero izmed njih sodo, denimo $2a$, je vsebovano tudi v množici, ki vsebuje število a . To ni mogoče, saj smo pri konstrukciji vedno izbirali najmanjša števila, ki jih še nismo razdelili v množice. Vsa najmanjša števila množic so torej liha. Ni težko videti, da so ta tudi v različnih množicah. Zapišemo lahko torej

▪ $\{1, 2, \dots, 2n\} = \{1, 2, 4, 8, \dots\} \cup \{3, 6, 12, \dots, 2n - 1\}$.

Množico smo tako razdelili na n delov (toliko je namreč lihih števil manjših od $2n$). Po Dirichletovem principu množica X vsebuje dva elementa x in y iz istega dela, za katera seveda velja $x \mid y$ ali $y \mid x$.

Če vas zanima, kako se spopasti s podobnimi nalogami, ali pa morda celo uvrstitev v katero izmed olimpijskih ekip, vabljeni, da se nam pridružite na letoletnih pripravah!



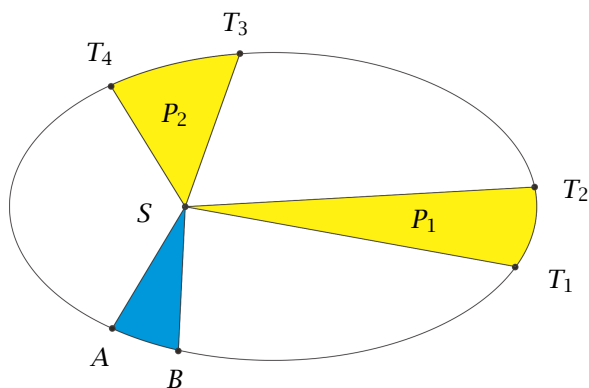
Kako je Isaac Newton dokazal drugi Keplerjev zakon?



ROBERT HAUKO IN SIMON ŠPACAPAN

→ Svoja prva dva zakona o gibanju planetov je Johannes Kepler postavil leta 1609 na podlagi podatkov o gibanju planetov okoli Sonca, pri tem pa je uporabil podatke, ki jih je nekaj desetletji pred njim zbral Tycho Brahe. V prvem zakonu pove, da se planeti gibljejo okrog Sonca po elipsah, Sonce pa se nahaja v enem od gorišč elipse. Drugi Keplerjev zakon, imenovan tudi *izrek o ploščinski hitrosti*, pa se glasi tako:

Daljica, ki povezuje planet in Sonce, opiše enake ploščine v enakih časih.



SLIKA 1.

Ploščina modrega območja je sorazmerna s časom potovanja od A do B.

Na zgornji sliki je Sonce označeno s S in se nahaja v gorišču elipse, po kateri se giblje planet. Ker sta ploščini P_1 in P_2 enaki, je po Keplerjevem zakonu čas, v katerem planet opravi pot od točke T_1 do T_2 ,

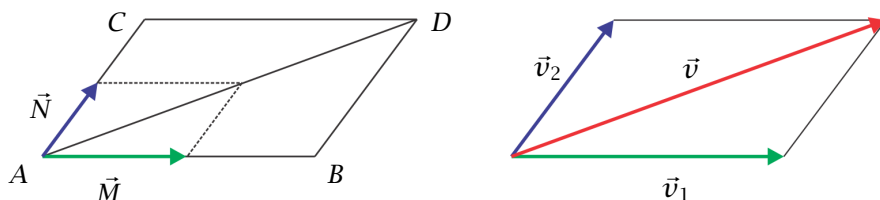
enak času, v katerem opravi pot od T_3 do T_4 . Keplerjev zakon lahko z drugimi besedami izrazimo tudi tako:

Čas gibanja planeta od točke A do točke B je sorazmeren s ploščino območja omejenega z daljicama SA, SB in delom elipse od A do B (v smeri gibanja).

Planeti se torej gibljejo hitreje, ko so bližje Soncu in počasneje, ko so dlje stran. Kepler zakona, ki ga je postavil na podlagi podatkov, ni znal dokazati ali matematično argumentirati — to je storil kakšnih sedem desetletij kasneje Newton. V tem članku se bomo sprehodili po Newtonovih stopinjah ter predstavili korake in matematične argumente, s katerimi je utemeljil Keplerjev zakon. Newton je izpeljavo, ki ji bomo sledili tudi mi, zapisal v knjigi *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, ki velja za enega največjih dosežkov v fiziki in znanosti nasplošno in v kateri med drugim tudi izpelje gravitacijski zakon, s katerim natančno opiše gibanje planetov v Sončnem sistemu.

Omeniti je treba, da je bila edina Newtonova predpostavka, iz katere je izpeljal Keplerjev zakon, da na telo deluje sila proti nepremični točki v prostoru. Pri tem pa velikost te sile in tirnica, po kateri se giblje telo, nista znani, in kot bomo videli v nadaljevanju, tudi nista pomembni. Propositio I. Theorema I., v katerem je zapisan Keplerjev zakon¹, torej velja za vsakršno gibanje telesa, na katerega deluje sila proti nepremični točki v prostoru. V izpeljavi bomo tudi videli, da je vsako takšno gibanje telesa ravninsko.

¹Propositio I. Theorema I. se pojavi na začetku drugega poglavja prve knjige *Principie* in se glasi tako: Ploščine, ki jih gibajoča telesa opišejo z radiji, ki jih narišemo k nepremičnemu središču sile, ležijo v isti nepremični ravnini, in so sorazmerne s časi, v katerih so opisane.



SLIKA 2.

Razlaga Newtonove trditve.

Pa pojdimo po Newtonovih stopinjah! Preden se poglobimo v Newtonovo izpeljavo, bomo navedli trditev, ki jo Newton uporabi v njej.²

Če na telo delujeta dve sili, potem telo opravi pot po diagonali paralelograma v enakem času, kot bi opravilo pot po stranicah tega paralelograma, če bi ti dve sili delovali na telo ločeno.

Če telo miruje v točki A in nanj deluje (za kratek trenutek) zgolj sila \vec{M} , se telo giblje premo enakomerno po daljici AB in v danem času prispe do točke B . Podobno, če na telo deluje zgolj sila \vec{N} , se telo giblje premo enakomerno po daljici AC , ter v enakem času prispe do točke C . Ko pa na telo delujeta obe sili hkrati, se telo premo enakomerno giblje po diagonali AD in v enakem času prispe do točke D (slika 2, levo). Z drugimi besedami, vsota hitrosti \vec{v}_1 in \vec{v}_2 je hitrost \vec{v} (slika 2, desno). Trditev velja tudi za sile, premike, pospeške itd. in predstavlja osnovo seštevanja vektorskih količin.

Sedaj pa pojdimo k dokazovanju Keplerjevega zakona. Naj bo S (nepremična) točka v prostoru, in naj sila vselej deluje v smeri proti tej točki. Telo se na začetku nahaja v točki A . Časovni interval, v katerem bomo opazovali gibanje telesa, razdelimo na enake dele in predpostavimo, da v prvem delu časa telo opravi pot od točke A do točke B , ob tem zamenjamo delovanje sile in upoštevamo zgolj njegovo premo enakomerno gibanje po daljici AB (slika 3).³ Ko se telo nahaja v točki B , bi ob odsotnosti vsakršne sile, nadaljevalo pot po daljici Bc , ki je po dolžini enaka daljici AB (tukaj Newton upošteva, da so časovni intervali enako dolgi).

Vendar v točki B predpostavimo, da sila deluje z velikim sunkom in telesu doda konstantno hitrost v smeri vektorja \vec{BS} . Če uporabimo trditev, ki smo jo navedli zgoraj, in upoštevamo inertno hitrost telesa v smeri vektorja \vec{BC} , ter hitrost v smeri vektorja \vec{BS} ugotovimo, da se telo začne gibati po diagonali paralelograma $BcCV$ in na koncu drugega časovnega obdobja prispe do točke C . Tako smo dobili geometrijsko konstrukcijo, za katero velja naslednje:

- Trikotnik BCS leži v isti ravnini kot trikotnik ABS .
- Ploščina trikotnika BcS je enaka ploščini trikotnika ABS .
- Ploščina trikotnika BcS je enaka ploščini trikotnika BCS .

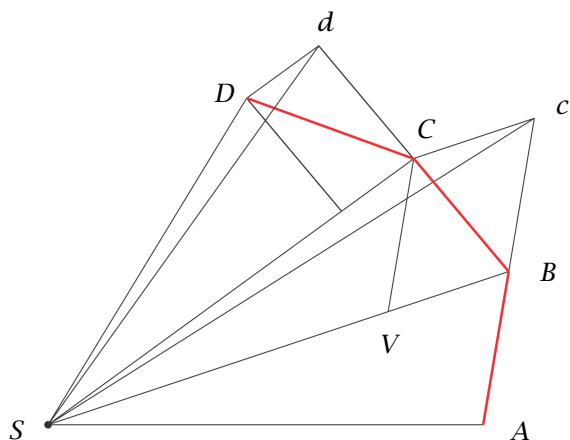
Zgornje trditve lahko hitro razmislimo tako: ker daljici Bc in BV ležita v isti ravnini kot trikotnik ABS sledi, da paralelogram $BcCV$ leži v isti ravnini kot trikotnik ABS , in zato tudi BCS leži v isti ravnini kot trikotnik ABS (s tem smo dokazali prvo točko). Trikotnika BcS in ABS imata isto višino in osnovnici enakih dolžin, torej imata enaki ploščini (to dokazuje drugo točko). Podobno velja, da imata trikotnika BcS in BCS isto višino, saj je BV vzporedna s cC , in ker imata skupno osnovnico SB , sledi, da imata enako ploščino (s tem smo dokazali tretjo točko).

Iz treh zgornjih lastnosti sledi dvoje: prvič, gibanje telesa (v prvih dveh časovnih intervalih) je ravninsko, saj daljici AB in BC ležita v isti ravnini, in drugič, ploščini trikotnikov ABS in BCS sta enaki. S tem smo torej razmislili, da sta ploščini območij, ki ju opiše daljica, ki povezuje pot, po kateri se giblje telo s točko S , v prvem in drugem časovnem intervalu enaki.

Opazimo, da so zgornje ugotovitve neodvisne od dolžine daljice BV in torej veljajo ne glede na to, kako veliko hitrost v smeri vektorja \vec{BS} dodamo telesu v točki B , oziroma so neodvisne od velikosti sile, ki deluje proti točki S .

²Trditev je zapisana v Corollarium I, na začetku *Principie*, in se pojavi neposredno po zapisu treh Newtonovih zakonov. Trditev navajamo skladno z Newtonovo dikcijo.

³Spomnimo se, da (po 1. Newtonovem zakonu) telo, na katerega ne deluje nobena sila, bodisi miruje ali pa se giblje premo enakomerno.



SLIKA 3.

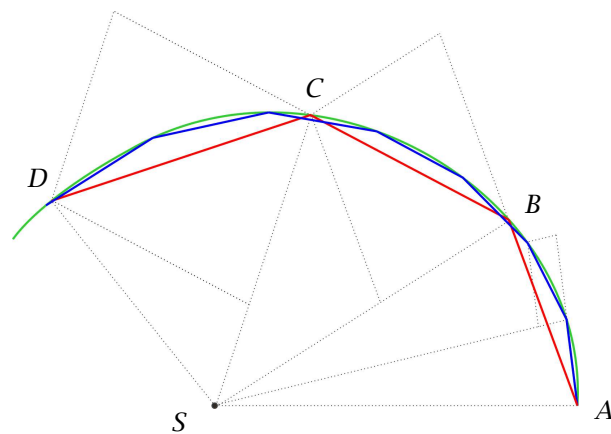
Newtonova geometrijska konstrukcija.

Postopek ponovimo na vseh delih časovnega intervala: v točki C predpostavimo, da sunek sile deluje proti točki S in doda telesu hitrost v smeri vektorja \overline{CS} ter ga tako preusmeri iz svoje inertne smeri Cd v smeri po daljici CD proti točki D . Tudi tukaj konstrukcijo naredimo tako, da je $|Cd| = |BC|$, in z analognimi argumenti kot zgoraj pridemo do sklepa, da je ploščina trikotnika CDS enaka ploščini trikotnika BCS , ki pa je enaka ploščini trikotnika ABS .

Tako vidimo, da je ploščina območja, ki ga opiše daljica, ki povezuje pot telesa s točko S , sorazmerna s številom trikotnikov, ki jih to območje vsebuje. Ker pa je število trikotnikov enako številu časovnih delov, sledi, da je ploščina območja sorazmerna s časom.

Newton dokonča izpeljavo tako, da število trikotnikov pošlje v neskončnost, dolžine stranic AB, BC, CD (in tako naprej) pa proti 0. Gre za pomemben korak, ki predstavlja osnovo infinitezimalnega računa in prehod od diskretne k zvezni sliki. Pri tem ne navaja podrobnosti (posebej pa ne navaja, kako veliki naj bodo zamiki v smeri točke S , v odvisnosti od dolžine časovnega dela), vendar trdi, da poligonska krivulja $ABCD$ (in tako naprej), po kateri se giblje telo, konvergira (limitira) proti ukrivljeni liniji⁴, ko število trikotnikov pošljemo v neskončnost in ko delovanje sile proti točki S upoštevamo vedno bolj

⁴Iz latinskega originala *Principie* smo »linea curva« prevedli kot »ukrivljena linija«, kar si lahko razlagamo kot »krivulja«.



SLIKA 4.

Poligonske krivulje konvergirajo proti ukrivljeni liniji.

pogosto v »neskončno« majhnih časovnih zamikih. Kako si lahko predstavljamo približevanje poligonske krivulje k ukrivljeni liniji, je prikazano na sliki 4. Rdeče in modro sta poligonski krivulji, in ko število daljic poligonske krivulje pošljemo v neskončnost, le-ta konvergira proti ukrivljeni liniji (zeleno na sliki 4).

Ker je ploščina območja med poligonsko krivuljo in točko S sorazmerna s časom, ki ga telo potrebuje za pot po tej poligonski krivulji, velja enako tudi za ukrivljeno linijo, proti kateri konvergirajo poligonske krivulje. S tem Newton zaključí izpeljavo Keplerjevega zakona.

V nadaljevanju Newton dokaže, da na vsako telo, ki se giblje pospešeno v prostoru in ima konstantno ploščinsko hitrost (glede na izbrano točko v prostoru), deluje sila v smeri proti tej točki. Drugi Keplerjev zakon torej natanko določa gibanja teles s konstantno ploščinsko hitrostjo – to so tista gibanja, na katera deluje sila v smeri nepremične točke. Keplerjevi zakoni zasedajo pomembno mesto v fiziki, saj jih je Newton uporabil pri izpeljavi gravitacijskega zakona. Opisani primer pa kaže na to, da je pot do pomembnih znanstvenih odkritij običajno polna ovinkov, na njih pa spoznanja iz različnih področij lahko sovpadajo in druga drugo tudi podpirajo.

Avtorja se zahvaljujeta Jani Padežnik Gomilšek in Borutu Zalarju za njune komentarje, popravke in pomoč pri pisanju članka.

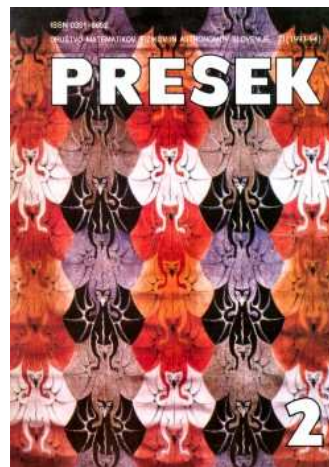


Nove knjige: Windows 3.1, podkrepljen z DOS 6.0

LETNIK 21, ŠTEVILKA 2, 1993



→ Mladi bralci in bralke verjetno ne vedo, da so v Preseku pred 30 leti precej redno izhajale tudi kratke recenzije in opisi novih knjig s področja matematike, fizike, astronomije ali računalništva, ki so bile takrat dostopne v trgovinah. In če v času pametnih telefonov in zaslonov na dotik morda kljub vsemu še vedo, kaj je to računalniška miška in operacijski sistem Windows, skoraj gotovo nimajo pojma, kaj je MS DOS. Malo starejši pa se še nostalgичno spomnimo tipkanja ukazov na črni zaslon in kopiranja datotek z magnetnih 5,25 ali 3,5-palčnih disket, pa tudi igre Minolovec, ki je v sistemu Windows 3.1 pomagala razbijati strah pred uporabo oken. Marsikdo bi jo z veseljem odigral še danes.



NOVE KNJIGE

Klavžar S. in Vesel A., WINDOWS 3.1, PODKREPLJEN Z DOS 6.0, Račkova knjižnica 9, 1993, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.


Po dveh letih premora je izšla nova knjižica iz zbirke Račkova knjižnica, ki jo verjetno številni poznate kot zbirko, ki začetniku pomaga pri prvem srečevanju z določenim programom. Sandi Klavžar, avtor prve knjige te zbirke – *Mali priročnik operacijskega sistema MS DOS* – je k sodelovanju pritegnil še Aleksandra Vesela in tako je nastala pričujoča knjiga.

Po besedah avtorjev naj bi bila knjiga namenjena predvsem začetnemu spoznavanju z Okni - MS Windows 3.1, z operacijskim sistemom DOS pa naj bi se spoznali le bežno. To povsem ne drži, saj zajemajo deli knjige, ki govorijo o DOSu, precejšen (dobrodošel) del knjige. Ne glede na to, kako priljubljeno je 'klikanje z miško', bo namreč začetniku večkrat lažje, če bo določena opravila naredil kar z ukazi operacijskega sistema.

Knjiga je razdeljena na štiri poglavja. V prvem spoznamo nekaj osnovnih pojmov o zgradbi osebnega računalnika. Glavnino knjižice sestavljata drugo in tretje poglavje, ki govorita o okolju Windows in o najpomembnejših programih, ki ga sestavljajo. V četrtem poglavju je zajeto najnovejše o DOSu, v dodatku pa so omenjene nekatere najpomembnejše novosti, ki jih prinaša nova inačica operacijskega sistema MS DOS, namreč 6.0.

V knjižici je zajeto vse najpomembnejše o DOSu in Oknih. Mogoče bo kdo pogrešal razlago te ali one stvari. Vendar ne pozabimo, kakšen je osnovni cilj te zbirke: Omogočiti kar se da enostaven začetek pri uporabi novih programov. To pa knjižica vsekakor omogoča.

Matija Lokar

OKRASNA ROŽA, PERUNIKA	KOZAREC		GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	NAŠ PISATELJ (FRANCE)	SLOVAŠKO-MADŽARSKA REKA, PRITOK DONAVE	ŽUPNLI PODREJENA UPRAVNA ENOTA, DUHOVNJA	VELIKO MEHIŠKO LETOVIŠČE	LEONHARD EULER	PRITOK DONAVE, KI IZVIRA V SVICI	NAŠA ODRŽAVNA KARJA (ZIGA IN TONČEK)	DEL OBRAZA	KIRURG BRECELJ	
			KRAJ BIVANJA										
			NAD-ZARIŠČE POTRESA		5								
			KOŽA, KI PREKRIVA OKO						PISATELJICA KODRIČ PEVEC SMOLAR				
			TRADICION. DALMATINSKA PEVSKA SKUPINA							OMEJEN ČAS NAJVIŠJI VRH FILIPINOV			
RAČUNSKI DEL MATEMATIKE	ČAS DNEVA, KO JE SONCE POD OBZORJEM		dMFA	PES. PSICEK	NAŠ PEVEC (MIRAN) AMERIŠKA IGRALKA (GOLDIE)							ŠPORTNA VADITELJICA	PREBIVALEC SEVERNE SOSEDE ZDA
			AMERIŠKI SKLADATELJ GLASS								TENIŠKI KLUB		
			VEZNIK								ODPORNA SJOČA KOVINA		
									JEDILNI OSLEZ TEŽNO, VZMETNO, NITNO ?				
											EVROPSKI VELETOK HRV. TEKSTOPISEK (MARIO)		
VISOK ANGLEŠKI PLEMIC	dMFA	ŠČIP	HOMOGENOST, ENOVITOST	INDUSTRIJSKO OBLIKOVANJE (IZVIRNO)	AMERIŠKI REŽISER (MARTIN)	PIVO STARIH SLOVANOV	OZNAKA TUNIZIJE AMERIŠKI IGRALEC (CHRISTIAN)	ITALIJAN. MESTO JUGOVZHODNO OD TORINA	VERSKA PODOBA ČILSKI REŽISER (RAUL)	10			
		NEKDANJI KUBANSKI SKAKALEC V DALJAVO (IVAN)					STAROGR. MATEMATIK IN FIZIK ALBERT EINSTEIN						
7		AMERIŠKI DRAMATIK (EUGENE) KOKOŠJI SAMEC			6		MESTO V ZG. EGIPTU NAŠ IGRALEC (SEBASTIJAN)				ROK ČEFERIN	NIKOLAJ ČERKASOV	
						KARBIDOVKA SPOMINSKA SLED V MOZGANIH			9				
							IZOLAN (KNJIŽNO) NEMŠKO MESTO SEV. OD ULMA						
		KITAJSKA DINSTIJA V 7. IN 8. STOLETJU			REKA V SANKT-PETERBURGU	8		NEREŠEN DOGODEK ALI ŠALJIVA ZGODBICA					
		POSLOVNEŽ MUSK			AM. FIZIK (ROBERT VAN DE) LETEČA ŽUŽELKA								
		PREDZADNJA GR. CRKA											
MATEMATIČNI ZNAK				SOSEDI ČRKE P			MORALNA NEVREDNOTA ENAKI ČRKI						
ELEKTRONSKO GLASBILLO, SINTETIZATOR				IGRALEC HARRIS									
NEMŠKA KNJIZEVNICA SEIDEL			PEVKA GOLAVSEK										

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. decembra 2023**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.



Zmaga na 16. mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike



VID KAVČIČ

→ Med 10. in 20. avgustom 2023 je v Katowicach na Poljskem potekala mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike. Na njej je slovenski tekmovalec posegel po najvišjem dosežku: Peter Andolšek je namreč postal absolutni zmagovalec 16. mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike. Ta izjemni uspeh ni le izjemen na področju astronomskih tekmovanj, ampak predstavlja tudi zgodovinski dosežek za vse olimpijade iz znanja, na katerih sodeluje Slovenija.

Peter Andolšek absolutni zmagovalec

Poleg tega, da je dosegel absolutno zmago na olimpijadi, se je **Peter Andolšek**, dijak Gimnazije Bežigrad, odlično odrezal tudi v obdelavi podatkov in astronomskih opazovanjih. Gre za drugi takšen dosežek slovenskega tekmovalca v zgodovini olimpijad iz znanja, saj je že leta 2017 Aleksej Jurca zmagal na astronomski olimpijadi na Tajskem.

Na letošnji olimpijadi so poleg Petra blesteli tudi drugi člani slovenske ekipe. **Miha Brvar** (Gimnazija Bežigrad) in **Žan Ambrožič** (Gimnazija Kranj) sta osvojila srebrni medalji, **Žan Arsov** (Gimnazija Bežigrad) bronasto medaljo, **Marija Judež** (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto) pa je prejela pohvalo.

Ekipo so pripravljali in vodili **Andrej Guštin**, **Dunja Fabjan** in **Vid Kavčič**. Pri izbirnem postopku in dodatnih pripravah na olimpijado so sodelovali tudi Andreja Gomboc, Simon Bukovšek, Urban Razpotnik, Rok Kovač, Jon Judež, Ema Mlinar, Jakob Jurij Snoj in Ajda Erjavec.

V tem članku predstavljamo nekaj bolj ali manj zahtevnih in dolgih nalog iz teoretičnega dela tekmovanja, ki so bile letos resnično čudovite in



SLIKA 1.

Astronomska posadka Slovenije s kapitani. Po vrsti z leve: Andrej Guštin, Vid Kavčič, Miha Brvar, Žan Arsov, Peter Andolšek, Marija Judež, Žan Ambrožič in Dunja Fabjan.

pristno astronomske. Za pregled članka in grafično asistenco se zahvaljujem Simonu Bukovšku.

T 1: Neptun v opoziciji

Naloga

Neptun bo 21. septembra 2024 v opoziciji. Izračunaj, katerega leta je bil Neptun nazadnje v opoziciji v času spomladanskega enakonočja. Predpostavi, da sta orbiti Zemlje in Neptuna krožni. Velika polos Neptunove orbite je $a = 30,070$ a. e.

Rešitev

Podatki: $a = 30,070$ a. e.

S pomočjo tretjega Keplerjevega zakona in poznane velike polosi a orbite izračunamo obhodni čas Neptuna. Pri tem upoštevamo, da veliko polos izrazimo v astronomskih enotah, čas pa v letih:

- $t_1 = a^{3/2} = 164,89$ leta.

Ker je Neptun zunanji planet, njegovo sinodsko periodo t_2 (v letih) izračunamo kot

$$\frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_1},$$

$$t_2 = 1,006102 \text{ leta,}$$

kjer smo označili $t_0 = 1$ leto.

Ekliptična dolžina Neptuna se tako spreminja s hitrostjo $(360^\circ/163,89)/\text{leto}$. Zanima nas, koliko let traja, da se Neptun nahaja v opoziciji in se pri tem premakne za 180° . Od tod nastavimo

$$\begin{aligned} t \cdot \frac{360^\circ}{163,89} &= 180^\circ, \\ t &= \frac{163,89}{2} = 81,95 \text{ leta,} \end{aligned}$$

iz česar zaključimo, da je bil Neptun nazadnje v opoziciji leta $2024 - 82 = 1942$.

T 5: Temna energija

Naloga

Opazovanja kažejo, da se vesolje širi pospešeno. Fluktuacije mikrovalovnega sevanja ozadja podpirajo ravno (evklidsko) geometrijo, kjer je skupna gostota (tj. vsota gostote snovi in ekvivalentne gostote vseh oblik energije) enaka tako imenovani *kritični gostoti*:

$$\rho_{\text{cr}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G},$$

kjer je H_0 vrednost Hubblove konstante danes. Toda skupna gostota snovi (svetle in temne) je ocenjena na $\rho_{m,0} \approx 2,8 \cdot 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$. To neskladje odpravimo, če predpostavimo, da standardni kozmološki model vključuje skrivnostno temno energijo s konstantno energijsko gostoto ε_Λ .

Določi vrednost ε_Λ in izračunaj, pri katerem rdečem premiku v preteklosti je bila energijska gostota snovi enaka gostoti temne energije.

Rešitev

Iz podane formule in vrednostma H_0 in G , ki ju najdemo v tabelah, lahko izračunamo vrednost kritične gostote:

$$\rho_{\text{cr}} = 9,202 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3.$$

V modelu ravnega vesolja velja

$$\rho_{m,0} + \frac{\varepsilon_\Lambda}{c^2} = \rho_{\text{cr}},$$

iz česar izrazimo in izračunamo

$$\varepsilon_\Lambda = [\rho_{\text{cr}} - \rho_{m,0}] c^2 = 5,8 \cdot 10^{-10} \text{ J/m}^3.$$

Skalirni faktor je z rdečim premikom povezan kot

$$a(z) = \frac{a_0}{1+z},$$

kjer je $a_0 = 1$ skalirni faktor danes. Gostota snovi ρ_m pada s tretjo potenco skalirnega faktorja, zato jo lahko v povezavi z rdečim premikom izrazimo kot

$$\rho_m(z) = \rho_{m,0}(1+z)^3.$$

Z uporabo enačbe $E = mc^2$ izrazimo energijsko gostoto ε_m z gostoto snovi:

$$\varepsilon_m(z) = \rho_m(z)c^2 = \rho_{m,0}(1+z)^3c^2.$$

Iz zgornje enačbe izrazimo iskani rdeči premik in pri tem upoštevamo zahtevani pogoj $\varepsilon_m = \varepsilon_\Lambda$:

$$z = \left[\frac{\varepsilon_\Lambda}{\rho_{m,0}c^2} \right]^{1/3} - 1 = 0,32.$$

T 9: Sekundarni mrk

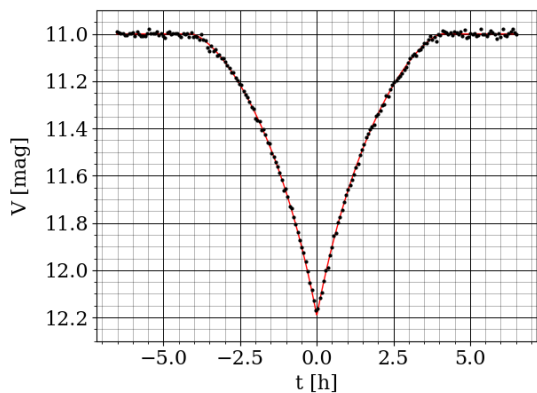
Naloga

Na spodnjih svetlobnih krivuljah so opazovanja primarnih mrkov dveh prekrivalnih dvozvezdij, imenovanih Lolek in Bolek:

Na slikah je t čas (v urah) glede na trenutek minimuma in V navidezni sij v V (vidnem) območju (v magnitudah). Točke predstavljajo meritve, črta pa krivuljo, ki se jim najbolj prilaga.

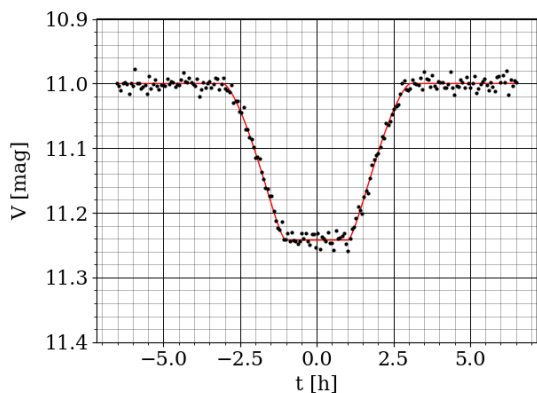
Predpostavi, da je mrk v obeh primerih centralen ($i = 90^\circ$) in da je trajanje mrka veliko krajše od obhodnega časa. Robna zatemnitev je zanemarljiva. Orbita imajo majhno ekscentričnost. Nariši predvideno obliko svetlobne krivulje za vsakega od sekundarnih mrkov. Zapiši vse enačbe in izračune, ki jih pri tem uporabiš.





SLIKA 2.

Opazovana svetlobna krivulja sistema Bolek.



SLIKA 3.

Opazovana svetlobna krivulja sistema Lolek.

Rešitev

Ker sta mrka v obeh primerih relativno kratka, lahko predpostavimo, da je kot, ki ga opišeta v orbiti, med mrkom zanemarljivo majhen. To pomeni, da je tangentna hitrost relativnega orbitalnega gibanja konstantna.

Sistem Bolek. Ker je minimum vrha oster in je mrk centralen, lahko sklepamo, da je $R_1 = R_2$. Zato bosta tako primarni kot sekundarni mrk popolna z minimalno navideznih sijev zaporedoma m_1 in m_2 .

Definirajmo $m_{1,2}$ kot skupni navidezni sij sistema,

ko ta ni v mrku, in označimo z L_1 in L_2 izseva zaporedoma prve in druge zvezde. Zapišimo Pogosonov zakon za oba primeri:

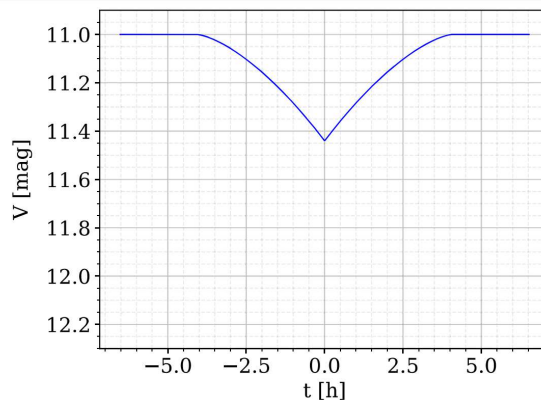
$$m_1 - m_{1,2} = -2,5 \log \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right),$$

$$m_2 - m_1 = -2,5 \log \left(\frac{L_2}{L_1} \right).$$

Če iz prve enačbe izrazimo razmerje izsevov in ga vstavimo v drugo, dobimo

$$m_2 = m_1 - 2,5 \log \left(10^{(m_1 - 0,4m_{1,2})} - 1 \right).$$

Ker sta orbiti skoraj krožni, sta časovni skali enaki za oba mrka. Zato je povsem zadovoljivo zgolj *prebrisati* krivuljo primarnega mrka, pri čemer njegovo globino skaliramo na $|m_{1,2} - m_2|$. S svetlobne krivulje razberemo $m_{1,2}$ in m_{min} in dobimo razmerje izsevov $L_2/L_1 = 2$ in $m_2 = 11,44$. Za sekundarni mrk sistema Bolek izrišemo spodnjo svetlobno krivuljo:



SLIKA 4.

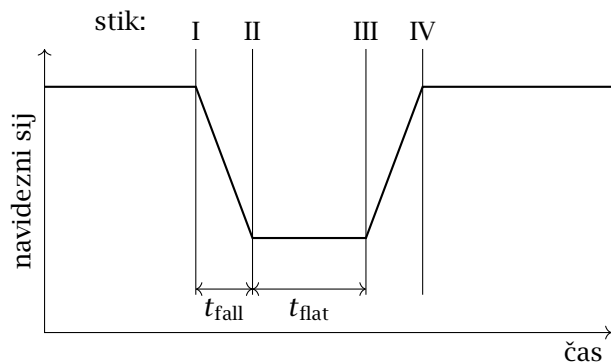
Predvidena svetlobna krivulja sekundarnega mrka sistema Bolek.

Sistem Lolek. Za sistem Lolek razmišljamo podobno, vendar opazimo, da je minimum svetlobne krivulje raven. Naj bo t_{fall} čas med stikoma I in II in t_{flat} čas med stikoma II in III, med katerim svetlobna krivulja ostane na svoji najmanjši vrednosti:

S podane svetlobne krivulje določimo

$$\frac{t_{flat}}{t_{fall}} = \frac{2(R_2 - R_1)}{2R_1},$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{t_{flat}}{t_{fall}} + 1.$$



SLIKA 5.

Shema mrka za sistem Lolek.

V zgornjih enačbah je R_1 polmer manjše od zvezd. Zaradi tega sledi, da obstajata dve rešitvi – lahko bi šlo za delni mrk ali za popolni mrk.

Najprej predpostavimo, da gre za popolni mrk. Izmerimo m_{\min} za mrk in skupni navidezni sij, ko mrka ni, $m_{1,2}$, (podobno kot v sistemu Bolek) in predpostavimo $m_{\min} = m_1$. S svetlobne krivulje razberemo vrednosti za $m_{1,2}$ in m_{\min} in za razmerje izsevov dobimo

$$\frac{L_2}{L_1} = 10^{0,4(m_1 - m_{1,2})} - 1 = 4$$

ter

$$\frac{R_2}{R_1} = 2$$

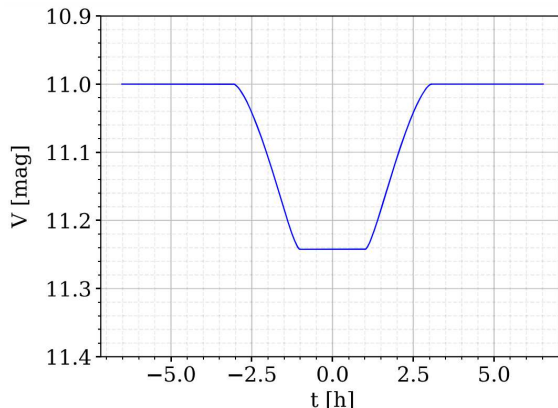
za razmerje polmerov. Iz tega po Stefanovem zakonu sledi, da sta efektivni temperaturi obeh zvezd enaki. To pomeni, da v resnici sploh ni pomembno, ali zvezda 2 prekrije zvezdo 1 oziroma obratno. V času, ko mrka ni, opazujemo dva diska z enako svetlo površino in skupno ploščino $\pi(R_1^2 + R_2^2)$, medtem ko lahko med mrkom vidimo le disk s površino πR_2^2 .

Na sliki 6 je oblika sekundarnega mrka sistema Lolek.

T 12: DART

Naloga

Dvojni preizkus preusmeritve asteroida (DART – Double Asteroid Redirection Test) je bila Nasina misija



SLIKA 6.

Shema mrka za sistem Lolek.

za razvoj metode za planetarno obrambo pred telesi v Zemljini bližini. Sonda je zadela Dimorfos, luno asteroida Didymos, da bi proučila, kako je trk vplival na njegovo orbito.

- (a) Izračunaj pričakovano spremembo obhodnega časa (v minutah). Predpostavi, da je bil trk čelen (frontalen), centralen in popolnoma neprožen.

Pred tem je Dimorfos krožil okoli Didymosa po krožni orbiti z obhodnim časom $P = 11,92$ h. Masi Dimorfosa in Didymosa sta zaporedoma $m = 4,3 \cdot 10^9$ kg in $M = 5,6 \cdot 10^{11}$ kg. Masa in hitrost sonde DART glede na Dimorfos v trenutku trka sta bili $m_s = 580$ kg in $v_s = 6,1$ km s⁻¹. Zanemari gravitacijske vplive preostalih teles.

- (b) V resnici so izmerili, da se je obhodni čas Dimorfosa spremenil za $\Delta P_0 = -33$ min. To je posledica tega, da je del gibalne količine odnesel izvrženi material: sonda se je zlepila z asteroidom, zaradi trka se je od asteroida odkrušil material in zletel v vesolje. Izračunaj gibalno količino izvrženega materiala in jo izrazi kot delež gibalne količine Dimorfosa pred trkom. Predpostavi, da je bila masa izvrženega materiala veliko manjša od mase Dimorfosa.

- (c) Izračunaj spremembo hitrosti (v mms⁻¹) Dimorfosa ob trku, tako da upoštevaš učinek izvrženih okruškov.



→ Rešitev

- (a) Masa Didymosa je veliko večja od mase Dimorfosa. Zato je lahko polmer a orbite Dimorfosa določimo z uporabo tretjega Keplerjevega zakona:

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{GM}{4\pi^2} &= \frac{a^3}{P^2}, \\ a &= \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 1,2 \text{ km}. \end{aligned}$$

Odtod lahko izračunamo tudi hitrost kroženja Dimorfosa pred trkom:

$$\blacksquare v_0 = \frac{2\pi a}{P} = 0,176 \text{ m/s}.$$

Naj bo v' hitrost Dimorfosa malo po trku. Ohranitev gibalne količine nam da

$$\begin{aligned} \blacksquare mv_0 - m_s v_s &= (m + m_s)v', \\ v' &= \frac{mv_0 - m_s v_s}{m + m_s} \approx v_0 - \frac{m_s}{m} v_s, \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali, da je masa vesoljskega plovila veliko manjša od mase Dimorfosa.

Nato s pomočjo enačbe vis-viva določimo veliko polos a' orbite po trku:

$$\begin{aligned} \blacksquare (v')^2 &= GM \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a'} \right) = \frac{GM}{a} \left(2 - \frac{a}{a'} \right) \\ &= v_0^2 \left(2 - \frac{a}{a'} \right), \\ 2 - \frac{a}{a'} &= \left(\frac{v'}{v_0} \right)^2 = \left(1 - \frac{m_s v_s}{m v_0} \right)^2 \\ &\approx 1 - \frac{2m_s v_s}{m v_0}. \end{aligned}$$

Velika polos se je tako spremenila za

$$\blacksquare \frac{\Delta a}{a} = \frac{a' - a}{a} = -\frac{2m_s v_s}{m v_0}.$$

Če se je velika polos spremenila iz a v $a + \Delta a$, potem se je obhodni čas spremenil iz P v

$P + \Delta P$, maso vesoljskega plovila pa lahko zanemarimo. Potem je:

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{a^3}{P^2} &= \frac{(a + \Delta a)^3}{(P + \Delta P)^2} = \frac{a^3(1 + \Delta a/a)^3}{P^2(1 + \Delta P/P)^2} \\ &= \frac{a^3}{P^2} \left(1 + \frac{3\Delta a}{a} - \frac{2\Delta P}{P} \right), \end{aligned}$$

iz česar sledi

$$\blacksquare \frac{\Delta P}{P} = \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a}.$$

Obhodni čas se je tako spremenil za

$$\blacksquare \frac{\Delta P}{P} = \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a} = -\frac{3m_s v_s}{m v_0}.$$

Obhodni čas Dimorfosa bi se tako moral zmanjšati za 1,4 % oziroma 10 minut.

- (b) Naj bo Δp gibalna količina odkrušenega materiala. Ohranitev gibalne količine potem zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \blacksquare mv_0 - m_s v_s &= (m + m_s)v' + \Delta p, \\ v' &= \frac{mv_0 - m_s v_s - \Delta p}{m + m_s} \\ &\approx v_0 - \frac{m_s}{m} v_s - \frac{\Delta p}{m}. \end{aligned}$$

S podobnimi izračuni kot pri delu (a) dobimo

$$\blacksquare \frac{\Delta a}{a} = -2 \left(\frac{m_s v_s}{m v_0} + \frac{\Delta p}{m v_0} \right)$$

in s tem

$$\blacksquare \frac{\Delta P_0}{P} = \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a} = -3 \left(\frac{m_s v_s}{m v_0} + \frac{\Delta p}{m v_0} \right).$$

Iskani rezultat je tako

$$\blacksquare \frac{\Delta p}{m v_0} = -\frac{\Delta P_0}{3P} - \frac{m_s v_s}{m v_0} = 0,011.$$

- (c) Sprememba hitrosti je enaka

$$\begin{aligned} \blacksquare \Delta v &= v' - v_0 = -\frac{m_s}{m} v_s - \frac{\Delta p}{m} \\ &= -\frac{m_s}{m} v_s + \frac{\Delta P_0}{3P} v_0 + \frac{m_s}{m} v_s \\ &= \frac{\Delta P_0}{3P} v_0 = -2,7 \text{ mm/s}. \end{aligned}$$

× × ×

Sferna trigonometrija in čas v astronomiji

NALOGE ZA BRALCE



VID KAVČIČ

→ **Bralke in bralci se gotovo spomnijo prispevka o sforni trigonometriji iz 6. številke prejšnjega letnika revije Presek. V prispevku smo si ogledali osnovne obrazce sfere trigonometrije in izpeljali nekaj osnovnih zvez za obravnavo lege nebesnih teles na nebesni sferi. Poleg tega pa smo omenili tudi osnovna načela, na katerih temelji merjenje časa.**

V tokratni številki objavljamo nekaj rešenih vaj iz sfere trigonometrije in časa, ki so se pojavile na preteklih izbirnih ter mednarodnih tekmovanjih iz astronomije in astrofizike. Naloge lahko služijo kot odlična priprava na izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo za Mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike, ki bo avgusta prihodnje leto potekala v Rio v Braziliji.

Tekmovalkam in tekmovalcem želim mnogo močganskih užitkov pri trenju astronomskih orehov.

Rešene naloge

Bralec lahko v nadaljevanju najde nekaj primerov rešenih nalog z izbirnih in mednarodnih tekmovanj iz astronomije in astrofizike, v naslednjem razdelku pa ga čaka tudi nekaj dodatnih nerešenih izzivov, s katerimi si lahko popestri prosti čas.

Izbirno tekmovanje 2014

Opazujemo dve zvezdi, za kateri vemo, da bosta sočasno prečkali južni meridian na višinah $h_1 = 30,0^\circ$ in $h_2 = 40,0^\circ$ (zgornja kulminacija). Kolikšen bo azimut obeh zvezd, ko bosta zašli? Katera zvezda

bo zašla prej in kolikšna bo razlika njunih časovnih kotov ob zahodu? Opazujemo iz Ljubljane ($\varphi = 46,0^\circ, \lambda = 14,5^\circ$). Vplive atmosfere zanemari.

Rešitev.

Podatki: $\varphi = 46,0^\circ, \lambda = 14,5^\circ, h_1 = 30,0^\circ, h_2 = 40,0^\circ$

Zemljepisna širina opazovališča je večja od višine zvezde, kar pomeni, da se bo prečkanje južnega meridiana (zgornja kulminacija) zgodila med zenitom in smerjo juga. Deklinacijo zvezd določimo iz

$$\delta = \varphi + h - 90^\circ.$$

Deklinacija prve zvezde $\delta_1 = -14,0^\circ$, deklinacija druge pa $\delta_2 = -4,0^\circ$. Azimut zahoda obeh zvezd (ko sta $h_1 = h_2 = 0^\circ$) določimo iz

$$\cos A = -\frac{\sin \delta - \sin \varphi \sin h}{\cos \varphi \cos h} = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi},$$

dobimo $A_1 = 69,7^\circ$ za prvo zvezdo in $A_2 = 84,3^\circ$ za drugo.

Prej bo zašla prva zvezda. Razlika njunih časovnih kotov ob zahodu bo

$$\Delta H = \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_2) - \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_1) = 43 \text{ min.}$$

Izbirno tekmovanje 2019

Na letošnjih počitnicah smo opazovali nočno nebo iz Wellingtona v Novi Zelandiji ($\varphi = -41^\circ 17' 20''$, $\lambda = +174^\circ 46' 19''$).

a) Ugotovi, katere zvezde so iz te lokacije nadobzornice, podobzornice ter vzhajalke.

b) Dne 30. avgusta 2019 bi radi opazovali zvezdo Ankaa v ozvezdju Feniks ($\alpha = 0^{\text{h}}26^{\text{m}}17^{\text{s}}$,





$\delta = -42^\circ 18' 21''$). Izračunaj čas kulminacije in koliko časa bo zvezda nad obzorjem. Kako visoko nad obzorjem bo ob kulminaciji? Upoštevaj $S(0^h \text{ UT}, 30.8.) = 22^h 31^m 36^s$. (IT 2019)

Rešitev.

Podatki: $\varphi = -41^\circ 17' 20''$, $\lambda = +174^\circ 46' 19''$, $\alpha = 0^h 26^m 17^s$, $\delta = -42^\circ 18' 21''$, $S(0^h \text{ UT}, 30.8.) = 22^h 31^m 36^s$

a) Če naredimo skico za nebo na jugu, ugotovimo, da so podobzornice zvezde, za katere velja

- $90^\circ - |\varphi| - \delta < 0$, $\delta > 90^\circ - |\varphi|$.

Podobzornice so za Wellington vse zvezde z deklinacijo $\delta > 48,71^\circ$.

Za nadobzornice mora veljati pogoj

- $|\varphi| - \delta - 90^\circ > 0$, $\delta < |\varphi| - 90^\circ$.

Nadobzornice v Wellingtonu so vse zvezde, za katere je $\delta < -48,7^\circ$.

Vzhajalke v Wellingtonu so vse tiste zvezde, za katere velja $-48,7^\circ < \delta < 48,7^\circ$.

b) Najprej izračunamo časovni kot vzhoda/zahoda:

- $\cos H_{v,z} = -\text{tg } \varphi \text{ tg } \delta = -0,7988$,

iz česar dobimo $H_v = -9,53^h$ in $H_z = 9,53^h$. Zvezda je nad obzorjem

- $\Delta t = \frac{H_z - H_v}{y} = 18,9^h$,

kjer smo upoštevali $y = \frac{366,25}{365,25}$. Čas kulminacije izračunamo iz enačbe

- $\alpha = S(0^h \text{ UT}, 30.8.) + \lambda + (t_k - 12^h)y$,

kjer upoštevamo, da je 30. avgusta v Wellingtonu zima. Dobimo $t_j = 2,35^h$. Zvezda kulminira 29. avgusta ob 2.21. Ob kulminaciji bo zvezda na višini

- $h = 90^\circ + |\varphi| - |\delta| = 89^\circ$.

Astronomsko tekmovanje treh dežel 2022

Leta 2022 je bil poletni solsticij 21. junija. Toda Zemlja bo v afeliju šele dva tedna kasneje, 4. julija. Inklinacija Zemljine osi je $\varepsilon = 23,5^\circ$.

a) Perioda precesije vrtilne osi je 26000 let. Oцени, v katerem letu bosta ali sta se poletni solsticij in afelij zgodila na isti dan, 4. julija.

b) Večkrat se omenja, da bo v prihodnosti zvezda Vega ($\alpha_V = 18^h 37^m$, $\delta_V = +38^\circ 47'$) kazala smer severa. Oцени, čez koliko let se bo to zgodilo.

Zanemari nutacijo, gibanje perihelija in ostale učinke drugega reda.

Rešitev.

Podatki: $\varepsilon = 23,5^\circ$, $\alpha_V = 18^h 37^m$, $\delta_V = +38^\circ 47'$, $\delta_E = 66,5^\circ$, $\alpha_E = 18^h$ $P = 26000$ let

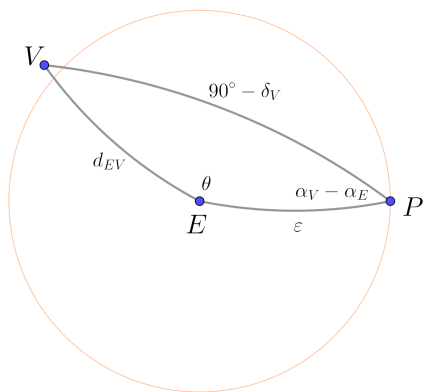
V prvem delu naloge nam bo prav prišlo računanje z ekliptično dolžino, zato se spomnimo tudi, da ekliptična dolžina Sonca s časom teče enakomerno kot $L = \frac{\Delta t}{365,25} \cdot 360^\circ$, pri čemer smo s Δt označili čas v dnevih po spomladanskem enakonočju.

a) Izračunajmo ekliptično dolžno Sonca ob poletnem solsticiju in v trenutku, ko je Zemlja v afeliju. Imamo $\Delta t_1 = 10 + 30 + 31 + 21 = 92$ dni in $\Delta t_2 = 10 + 30 + 31 + 30 + 4 = 105$ dni, od koder sledi $L_1 = 90,678^\circ$ in $L_2 = 103,490^\circ$. Precesija se dogaja glede na ravnino ekliptike s periodo $P = 26000$ let, zato se bosta poletni solsticij in afelij zgodila na isti dan čez:

- $t = \frac{\Delta L}{360^\circ} \cdot P = 925$ let.

b) Označimo z V lego Vege in s P lego nebesnega pola na nebesni sferi. Razmislimo, da so koordinate severnega pola ekliptike $E(\delta_E = 66,5^\circ$, $\alpha_E = 18^h)$. Gledamo sferični trikotnik VPE , ki je za lažjo predstavbo prikazan tudi na sliki 1.

Razmislimo, da v trikotniku velja $VP = 90^\circ - \delta_V$, $EP = \varepsilon$, poleg tega pa velja $\angle VPE = \alpha_V -$



SLIKA 1.

Sferični trikotnik Vega (V) – severni nebesni pol (P) – severni pol ekliptike (E). Zvezde, ki se nahajajo na oranžni krožnici, v času ene periode precesije prečkajo severni nebesni pol.

α_E . Dolžino d_{EV} izrazimo s formulo za razdaljo med točkama na sferi

$$\cos d_{EV} = \sin \delta_V \sin \delta_E + \cos \delta_V \cos \delta_E \cos(\alpha_V - \alpha_E),$$

iz česar izračunamo $d_{EV} = 28^{\circ}13'$.

Iz sinusnega izreka za sferični trikotnik VPE sledi

$$\sin \angle PEV = \frac{\sin VP}{\sin VE} \sin \angle VPE,$$

$$\sin \theta = \frac{\cos \delta_V}{\sin d_{EV}} \sin(\alpha_V - \alpha_E),$$

iz česar dobimo edino smiselno rešitev $\theta = 164^{\circ}38'$.

Zemljina navidezna os se mora torej zaradi precesije zavrteti za kot θ in ker se ta s časom spreminja enakomerno, bo Vega v bližini severnega nebesnega pola čez približno

$$\Delta t = \frac{\theta}{360^{\circ}} \cdot P = 11\,900 \text{ let.}$$

Naloge bralcu

1. Za sferični trikotnik s podatki $a = 70^{\circ}$, $b = 50^{\circ}$, $C = 85^{\circ}$ izračunaj dolžino preostale stranice in velikost preostalih kotov.

2. Kolikšna je razdalja (po površju, v kilometrih) med Ljubljano ($\varphi = 46^{\circ}$, $\lambda = 14^{\circ}32'$) in Rio de Janeirom ($\varphi = -23^{\circ}$, $\lambda = -43^{\circ}13'$)? V kakšni smeri (v stopinjah) od severa bi morali odpotovati, da bi iz Ljubljane v Rio de Janeiro šli po najkrajši poti? Polmer Zemlje je $R_Z = 6400$ km.
3. (IOAA 2014) Romunska astronoma Ovidiu Teracu in Alex Dumitriu iz kraja Galati Romania sta pred kratkim odkrila dve spremenljivi zvezdi. Galaktične koordinate zvezd so: Galati V1 ($l_1 = 114,37^{\circ}$, $b_1 = -11,35^{\circ}$) in Galati V2 ($l_1 = 113,27^{\circ}$, $b_1 = -16,18^{\circ}$). Oцени kotno razdaljo med zvezdama Galati V1 in Galati V2.
4. (IOAA 2015) Letalo leti z Lime ($\varphi = -12^{\circ}2'$, $\lambda = -77^{\circ}1'$) v Džakarto ($\varphi = -7^{\circ}47'$, $\lambda = 110^{\circ}26'$), pri čemer za let izbere najkrajšo pot po površju. Določi koordinate najjužnejše točke, v kateri se nahaja med letom.
5. (IOAA 2022) Astronomka Keto je ponoči letela z letalom v zahodni smeri po najkrajši poti od Tbilisija (prestonica Gruzije) do Atlante (prestonica ameriške zvezne države Georgia). Skozi okno letala je lahko ves čas videla zvezdo Furud v ozvezdju Veliki pes, čeprav se je zvezda na neki točki poleta navidezno dotaknila natančno južne točke obzorja. Izračunaj zemljepisno širino φ_B in dolžino λ_B Atlante, kjer je Keto pristala.
Potovanje je trajalo 11 ur in 25 minut in letalo je letelo s povprečno hitrostjo 875 km/h. Deklinacija Furud $\delta_F = -30^{\circ}4'$. Koordinate Tbilisija so: $\varphi_A = 41^{\circ}43'$, $\lambda_A = 41^{\circ}48'$. Zanemari učinke vrtenja Zemlje, višino letala, atmosfersko refrakcijo in vetrove.
6. Izračunaj višino Sonca na meridianu prvega poletnega dne za opazovalca na geografski širini 42° severno. Kolikšna je največja višina Sonca na prvi zimski dan v istem kraju?
7. Koordinate Arkturja so $\alpha = 14^{\text{h}}16^{\text{m}}0^{\text{s}}$ in $\delta = 18^{\circ}11'$. Določi zvezdni čas v trenutkih, ko Arktur vzide in zaide v Bostonu ($\varphi = 42^{\circ}19'$).
8. Polna Luna je 19. junija za opazovalca v kraju s koordinatami $\lambda = 107^{\circ}35'$ in $\varphi = 6^{\circ}49'$ kulminirala ob $0^{\text{h}}30^{\text{ms}}$. Kdaj je tistega dne vzšla in kdaj zašla?





9. (Izbirno tekmovanje 2015) Astronomski mrak se začne ob Sončnem zahodu (ko rob zahajajočega Sonca ravno zaide pod obzorje) in konča, ko je središče Sonca 18° pod obzorjem. Izračunaj dolžino astronomskega mraka ob enakonočju ter na prvi poletni dan. Izračunaj, ob kateri uri se 14. marca zaključi astronomski mrak. Naše opazovališče je na koordinatah $\varphi = +46^\circ$, $\lambda = +14,5^\circ$. Zanemari pojave v atmosferi.
10. (Izbirno tekmovanje 2016) Neki komet, ki ga opazujemo iz naših krajev ($\varphi = +46^\circ$, $\lambda = +14,5^\circ$) je imel 21. decembra navidezni sij 5,31, njegovi koordinati sta bili $\delta = +34^\circ 21' 10''$, $\alpha = 16^h 14^m 58^s$.
- Na kolikšni razdalji od Zemlje (v astronomskih enotah) je bil takrat, če je bila njegova absolutna magnituda 38,6?
 - Kolikšna je bila takrat njegova kotna razdalja od Sonca?
 - Kolikšna je bila takrat hitrost kometa, če se giblje po paraboli?
 - Za koliko časa po začetku astronomske noči je bil 21. decembra komet še nad obzorjem? Astronomska noč se začne, ko je Sonca -18° pod obzorjem. Predpostavi, da se kometu v tem času koordinate niso bistveno spremenile.
11. (Izbirno tekmovanje 2017) Veliki Magellanov oblak ($\alpha_1 = 5^h 23^m 35^s$, $\delta_1 = -69^\circ 45' 22''$) in Mali Magellanov oblak ($\alpha_2 = 0^h 52^m 45^s$, $\delta_2 = -72^\circ 49' 23''$) sta nepravilni pritlikavi galaksiji, ki krožita okrog naše Galaksije. V nadaljevanju predpostavite, da razsežnost objektov ni pomembna.
- Koliko stopinj južno od Avberja ($\varphi = 46^\circ$) moramo najmanj iti, da bosta oba Magellanova oblaka vedno nad obzorjem?
 - Kolikšna bo iz tistega kraja najvišja višina nad obzorjem za vsakega izmed njiju in na katerem območju azimutov ju bomo lahko opazovali?
 - Kolikšno zorno polje bi moral pokriti objektiv fotoaparata, da bi lahko na posnetek ujeli oba Magellanova oblaka? Senzor CCD v fotoaparatu je velik $35 \text{ mm} \times 35 \text{ mm}$. Kolikšna mora biti goriščna razdalja objektiva, ki bil primeren za tako fotografijo?
12. (Izbirno tekmovanje 2018) Dne 24. junija opazujemo zvezdo Vega ($\alpha = 18^\circ 36' 56''$, $\delta = +38^\circ 47' 1''$) iz Ljubljane ($\varphi = +46^\circ 13'$, $\lambda = +14^\circ 27'$).
- Kdaj kulminira Vega? Kolikšna je njena višina ob kulminaciji?
 - Kolikšna sta višina in azimut zvezde, če jo opazujemo ob 23.00?
13. (IOAA 2013) Koliko znašata časovni kot H in zenitna razdalja z Vege ($\delta = 38^\circ 47'$ v kraju Thessaloniki ($\lambda_1 = 1^h 32^m 0^s$, $\varphi_1 = 40^\circ 37'$) v trenutku, ko ta kulminira na lokalnem nebesnem poldnevniku v Lizboni ($\lambda_2 = -0^h 36^m 0^s$, $\varphi_2 = +39^\circ 43'$)?
14. **Zahtevnejša naloga** (IOAA 2020): Opazovalec zvezd v Chiayi, Kitajski Taipei ($23,5^\circ \text{N}$, $120,4^\circ \text{E}$, GMT+8) je opazil dva meteorja ob 21:00 (po času Kitajskega Taipei) dne 25. septembra 2020. Prvi meteor se je pojavil točno na zahodnem obzorju in švignil do točke na višini 15° natanko nad severnim obzorjem. Drugi meteor pa se je pojavil na višini $23,5^\circ$ in azimutu 210° in svojo sled končal na višini 75° in azimutu 255° .
- Kolikšen je lokalni zvezdni čas (LST) v trenutku opazovanja?
 - Poišči višino in azimut radianta meteorskega roja.
 - Poišči ekvatorialne koordinate navideznega radianta.
 - Katero od ozvezdji je najbliže radiantu meteorskega roja? Crux / Dorado / Pavo / Tucana / Triangulum Australes

Opombi:

- Azimuti so merjeni od severa (0°) proti vzhodu.
- Zvezdni čas na Greenwichu (GST) ob 00:00 UT dne 1. januarja 2020 je $6^h 40^m 30^s$.

× × ×

Geometrijska konstrukcija elipse in hiperbole



BOŠTJAN KUZMAN

→ Stožnice običajno definiramo na enega od treh načinov: geometrijsko kot presečišče neskončnega dvojnega stožca z ravnino, algebraično kot množico rešitev splošne enačbe drugega reda, ali pa kot množico točk, ki ustrezajo nekemu geometrijskemu pogoju. V tokratnem GeoGebrinem kotičku si bomo ogledali, kako lahko s konstrukcijo lokusa, ki nastane pri gibanju točke po krožnici, dobimo tako elipso kot hiperbolo.

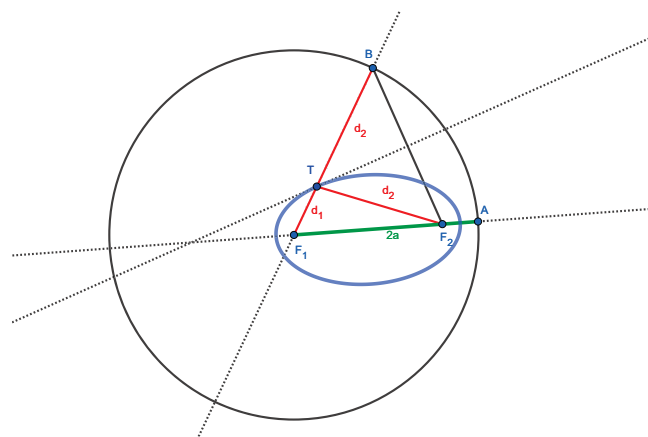
Posvetimo se najprej elipsi. Definiramo jo kot množico točk v ravnini, za katere je vsota razdalj točke od vnaprej izbranih gorišč F_1, F_2 enaka izbrani konstanti, ki jo označimo z $2a$:

$$E = \{T \in \mathbb{R}^2 : d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a\}.$$

Denimo torej, da sta gorišči F_1, F_2 dani točki v ravnini, vrednost $2a$ pa predstavlja polmer krožnice s središčem F_1 (Slika 1). Potem za poljubno točko B na krožnici simetrala daljice BF_2 seka premico skozi B in F_1 v neki točki T , ki je torej enako oddaljena od B in od F_2 . Bralec zdaj zlahka sam razmisli, da je vsota razdalj točke T od gorišč F_1 in F_2 enaka $2a$, ne glede na to, kje na krožnici leži točka B .

Zdaj je kot na dlani tudi ustrezna konstrukcija v GeoGebri:

- Na delovni površini skrijemo koordinatni sistem.
- Izberemo poljubni točki F_1 in F_2 , ki predstavljata gorišči elipse, in narišemo premico skozi ti dve točki.
- Na premici izberemo poljubno točko A tako, da ne leži med goriščema, in narišemo krožnico s središčem F_1 skozi točko A .
- Označimo lahko tudi polmer te krožnice, torej, daljico od F_1 do A , in jo obarvamo z drugo barvo.

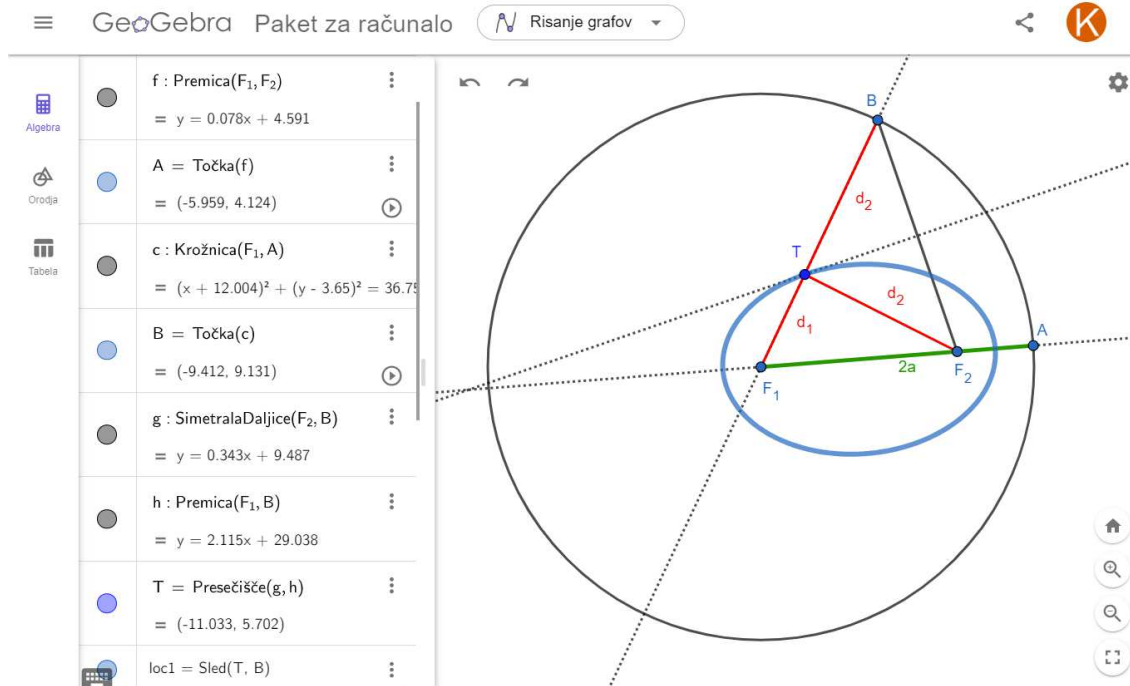


SLIKA 1.

Konstrukcija elipse s pomočjo gibanja točke B po krožnici s središčem v enem od gorišč.

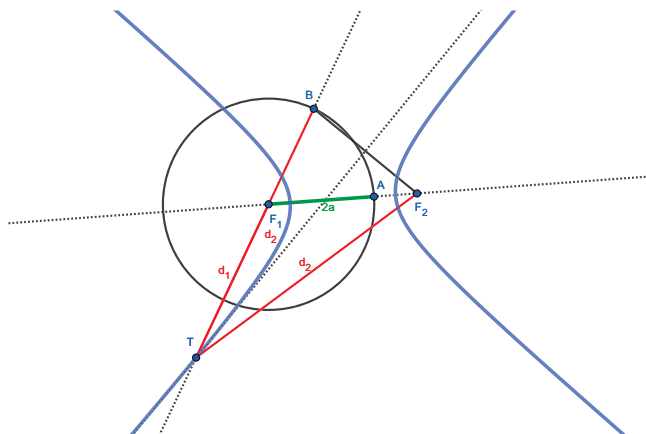
Njena dolžina predstavlja vrednost $2a$, ki jo lahko torej spreminjamo s premikanjem točke A .

- Zdaj izberemo neko drugo točko B na krožnici. Premikanje te točke bo ustvarilo iskano krivuljo.
- Narišemo premico skozi F_1 in B , ter simetralo daljice skozi F_2 in B . Presečišče teh dveh premic označimo s točko T . Risanje lahko skrajšamo, tako da narišemo le točko T z direktnim ukazom $T = \text{Presečišče}(\text{Premica}(F_1, B), \text{Simetrala}(F_2, B))$.
- Zdaj lahko premikamo točko B po krožnici in opazujemo gibanje točke T . Če vklopimo sled točke T in s točko B opišemo cel krog, bomo na sliki prepoznali elipso.
- Če želimo narisano sled zbrisati, najprej izključimo sled točke T , nato še zbrisemo že narisano sled točke s kombinacijo tipk CTRL+F.
- Z ukazom $\text{Sled}(T, B)$ se celotna sled točke vnaprej izriše kot krivulja. V tem primeru lahko opazujemo, kako se elipsa spreminja, če premikamo točki F_2 in A .



SLIKA 2.

Konstruktivsko okno v GeoGebri.



SLIKA 3.

Če leži drugo gorišče zunaj krožnice, s povsem enako konstrukcijo dobimo hiperbolo.

Zdaj se lahko lotimo še konstrukcije hiperbole. Izkaže se, da zadošča le ena poteza, s katero spremenimo prejšnjo konstrukcijo: točko A, ki določa polmer krožnice, pomaknemo tako, da leži med F_1 in F_2 (torej, da eno od gorišč leži znotraj, drugo pa zunaj krožnice). Po definiciji je namreč hiperbola množica točk v ravnini, za katere je absolutna vrednost razlike razdalj točke od vnaprej izbranih gorišč F_1, F_2 enaka izbrani konstanti $2a$:

$$E = \{T \in \mathbb{R}^2 : |d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a\}.$$

Bralci lahko s pomočjo Slike 3 zdaj sami premislijo, zakaj dolžina daljice F_1A predstavlja ravno razliko razdalj.

× × ×

www.presek.si

www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

Virga – suha nevihta



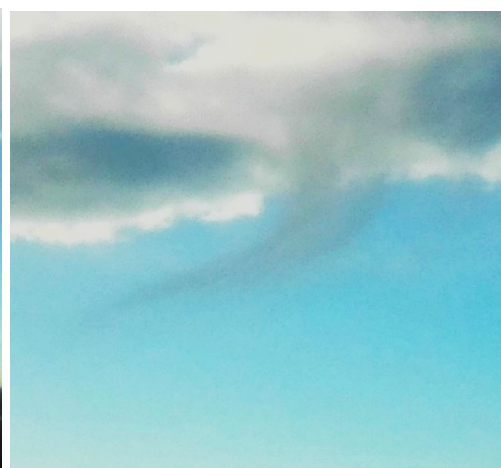
ALEŠ MOHORIČ

→ V meteorologiji je virga pojav, ko padavine padejo iz oblaka, vendar izhlapijo ali sublimirajo, preden dosežejo tla [1]. Virga je vidna zavesa padavin, za katero se zdi, da visi iz baze oblakov, vendar ne doseže tal. Zaradi značilne oblike imenujejo oblake, iz katerih pada virga, tudi meduzni oblaki.

Običajno virga nima popolnoma navpične oblike. Običajno poteka v zgornjem delu naravnost navpično ali pod kotom, nato pa ima blizu dna kljukasto obliko, preden izgine. To zavito obliko lahko povzroči horizontalni veter, ki se spreminja z višino, v glavnem pa nastane zaradi načina, kako se upočasni hitrost spuščanja dežnih kapljic ali snežnih kristalov zaradi izhlapevanja. Izhlapevanje samo po sebi sicer ne upočasni terminalne hitrosti kapljic, se pa pri izhlapevanju kapljica zmanjšuje. Virga običajno pada iz visokih cirusnih oblakov, občasno nastane tudi iz konvektivnih kumulusnih oblakov, kjer padavine pa-

dejo v bolj suho zračno plast, nastane pa tudi v fenskem oblaku – pogosto jo spremljamo pod gorami ob Karavanskem fenu.

Virga nastane, ko padavine padejo iz visokih oblakov v zelo suh zrak z nizko relativno vlažnostjo, ki je pogosto posledica visokih temperatur pod oblaki [2]. Če oblačna kaplja postane dovolj velika, da je njena hitrost padanja večja od hitrosti vzgornika, kaplja zapusti oblak in postane deževna kaplja. Mejna vrednost premera kaplje v pršenju je približno 0,2 mm, tipična oblačna kaplja pa ima premer 2 mm. Deževne kaplje takšne velikosti lahko padajo s hitrostjo do 6,5 m/s. Če je zrak med spodnjim robom oblaka in tlemi zadosti suh, manjše deževne kaplje izhlapijo, še preden dosežejo tla. Ta pojav je zelo pogost v puščavah in zmernih podnebjih. Virge lahko povzročijo različne vremenske učinke, saj se dež spreminja iz tekočine v paro in pri tem prejme



SLIKA 1.

Virga pod oblakom, na obzorju je vidno zahodno večerno nebo. Zavesa dežja na dnu močno zavije proti zahodu, tal pa ne doseže.
Vir: Aleš Mohorič



SLIKA 2.

Luknja v oblakih, ki je nastala, ko so kapljice v oblaku padale navzdol in je oblak ostal brez vode. Vir: H. Raab, licenca CC.

znatno količino toplote iz zraka zaradi visoke specifične izparilne toplote vode, zrak pa se posledično ohladi. Padavine, ki padejo v te zračne mase, ki se zaradi ohlajanja spuščajo, lahko sčasoma dosežejo tla. V nekaterih primerih se lahko ti žepi hladnejšega zraka hitro spuščajo, kar ustvarja mokre ali suhe lokalizirane turbulence, ki so lahko zelo nevarne za letala. Nasprotno pa se npr. ob fenskem vetru lahko zrak, v katerem izhlapijo padavine na visoki nadmorski višini, med spuščanjem in adiabatnim stiskanjem segreje in lahko znatno in hitro poveča temperature na tleh pod virgo. Ta dokaj redek pojav, toplotni izbruh, po navadi tudi zelo posuši zrak. Virge imajo tudi vlogo pri nastajanju nevihtnih celic. To je zato, ker majhne delce iz enega oblaka odpihne v sosednji prenasičen zrak in tam delujejo kot nukleacijska jedra za naslednji nevihtni oblak.

Virga lahko spremlja luknje v oblakih. Namreč, podhlajene vodne kapljice v oblakih nenadoma zmrznejo. Tisto, kar zmrzne in izpade, vidimo kot virgo. Ker pa lahko hkrati pri tem procesu kapljice tudi izhlapijo, vidimo nad izpadajočo virgo luknjo v oblaku. Tak primer je prikazan na sliki 2. Poleg tega lahko virga visoko v ozračju odbija sončno svetlobo, kar ustvarja svetle sončne stebre in druge atmosferske optične pojave.

Kot vse lahke padavine se tudi virga na radarju pokaže kot odtenki svetlo zelene (dež) ali svetlo modre (sneg). Medtem ko virgo radar lahko zazna, je

vaše oči morda ne bodo. Če ste kdaj gledali radarsko sliko padavin in videli vodilni rob dežja ali snega nad vašo lokacijo, vendar niste videli dežja ali snega, potem vas je virga že obiskala. To je pogosto pozimi, še posebej, ko čakamo na začetek snežne nevihte.

Beseda virga izhaja iz latinščine in pomeni palica, veja. Virgo opazimo tudi na drugih planetih, kot sta Venera in Mars [3]. Najlažje jo opazujemo tik ob sončnem vzhodu in zahodu. Sončna svetloba osvetljuje padavine, za katere se sicer zdi, da zbledijo v nebo. Na današnji naravoslovni fotografiji je vidna taka virga, ki jo poudarjeno kaže izsek na sliki 1 desno in je bila posneta zvečer, tik po sončnem zahodu.

Literatura

- [1] *Virga*, dostopno na <https://en.wikipedia.org/wiki/Virga>, ogled 23. 10. 2023.
- [2] *What Is Virga Precipitation?*, dostopno na <https://www.thoughtco.com/virga-precipitation-and-dry-thunderstorms-3444323>, ogled 23. 10. 2023.
- [3] *Virga - Rain or Snow That Doesn't Reach the Ground*, dostopno na <https://sciencenotes.org/virga-rain-or-snow-that-doesnt-reach-the-ground/>, ogled 23. 10. 2023.

× × ×

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Izšlo je že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016.*

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.