PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **11** (1983/1984)
Številka 3
Strani 132–135

Drago Bajc:

ZA MALO STAREJŠE BRALCE

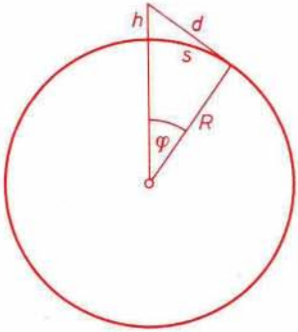
Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/11/664-Bajc.pdf

MATEMATIKA

ZA MALO STAREJŠE BRALCE

V 3. številki IX. letnika Preseka je izšel zelo zanimiv članek "*Saj ni res ... pa je*", v katerem je bilo govora o naslednjem problemu: Okrog Zemlje, ki si jo predstavljamo kot idealno kroglo, napnemo za 2mm daljšo vrv, kot je njen obseg. Vrv v eni točki podpremo z navpično letvijo. V omenjenem članku smo spoznali, da je višina h podpore presenetljivo velika, namreč $h \doteq 1.93$m, kar pomeni, da pod vrvico tam lahko preide odrasel človek.



Slika 1

Tokrat bomo isti problem prikazali še v drugi luči, ki pa bo žal razumljiva le nekoliko starejšim bralcem Preseka (od tod naslov), ki že poznajo osnovne pojme trigonometrije. Od količin, ki so označene na sliki 1, poznamo polmer Zemlje $R \doteq 6370$ km in razliko

$$d - s = \eta = 1 \text{ mm} \tag{1}$$

Vpeljimo še kot φ, merjen v ločnih stopinjah ali radianih, ki pripada loku s (glej sliko 1)! Z njegovo pomočjo lahko pišemo $R\mathrm{tg}\varphi - R\varphi = \eta$ ali

$$\mathrm{tg}\varphi - \varphi = \eta/R \tag{2}$$

Ves problem je izračunati neznanko φ iz te enačbe. Ta pa ni ne algebrajska ne trigonometrična enačba, ampak oboje skupaj.

Ko bi se vsaj dalo namesto tgφ pisati kak polinom, ki bi se pri manjših kotih z njim dovolj dobro ujemal ...! Za zelo majhne kote je nekaj takega res, saj je takrat $tg\varphi \approx \varphi$, o čemer se lahko prepričate s kalkulatorjem. To pa nam ne more biti v korist, saj bi uničilo levo stran enačbe (2). Očitno potrebujemo nekoliko bolj natančen približek s polinomom.

Polinom, ki ga iščemo, ni popolnoma neznan. Nekaj o njem le vemo: lahko vsebuje samo lihe potence. Razlog je preprost. $tg\varphi$ menja predznak, če menjamo predznak kotu φ (pravimo, da je tangens liha funkcija), te usluge pa potence s sodim eksponentom niso pripravljene storiti. Zato namesto s približkom

$$tg\varphi \approx \varphi \tag{3}$$

poskusimo s približkom, ki sledi temu po težavnosti:

$$tg\varphi \approx \varphi + a\varphi^3 \tag{4}$$

Če približno velja (3), mora za zelo majhne kote približno veljati tudi (4), saj je φ^3 dosti manjši od φ (primer: če je $\varphi = 10^{-2}$, je $\varphi^3 = 10^{-6}$). Pravzaprav bomo videli, da je (4) celo boljši približek od (3) za primerno vrednost koeficienta a. Kaj pomeni "primerna"? Tu naj nam priskoči na pomoč majhna zvijača! Če velja (4) za vsak dovolj majhen kot φ, mora veljati tudi za $\varphi/2$. Zato je

$$tg\varphi/2 \approx \varphi/2 + a(\varphi/2)^3 = \varphi/2 + a\varphi^3/8 \tag{5}$$

Po drugi strani je

$$tg\varphi = \frac{2tg\varphi/2}{1-tg^2\varphi/2} \approx \frac{2(\varphi/2+a\varphi^3/8)}{1-(\varphi/2+a\varphi^3/8)^2} \approx \frac{\varphi+a\varphi^3/4}{1-\varphi^2/4} \tag{6}$$

V imenovalcu smo izpustili vse potence od četrte dalje, ker imajo še manjšo vrednost. Če izenačimo zvezi (4) in (6) in odpravimo ulomek, dobimo

$$\varphi + a\varphi^3 - \varphi^3/4 - a\varphi^5/4 \approx \varphi + a\varphi^3/4$$

To zvezo imamo za enačbo, v kateri iz istega razloga kot zgoraj izpustimo člen s peto potenco. Nazadnje dobimo $a = 1/3$. Za $tg\varphi$ imamo torej približek

$$tg\varphi \approx \varphi + \varphi^3/3$$

nakar enačba (2) dobi obliko $\varphi^3/3 \approx n/R$, od koder sledi

$$\varphi \approx (3\eta/R)^{1/3} \approx \left(\frac{3.10^{-3}}{6,37.10^{6}}\right)^{1/3} \approx (3/6,37)^{1/3}.10^{-3}$$

to je $7,78.10^{-4}$ radianov, kar je približno $4,46.10^{-2}$ stopinj ali 2,7 minut. Sedaj dobimo

$$d \approx s = R\varphi \approx 4,96 \text{ km}$$

in

$$h = R/\cos\varphi - R$$

Ker pa je φ zelo majhen, z običajnimi tabelami ali z žepnim računalnikom ne moremo izračunati izraza $1/\cos\varphi - 1$. Tudi zanj lahko hitro dobimo podoben približek kot za $\mathrm{tg}\varphi$. Upoštevajmo zvezo $\mathrm{tg}^2\varphi/2 = (1-\cos\varphi)/(1+\cos\varphi)$ oziroma $\cos\varphi = (1-\mathrm{tg}^2\varphi/2)/(1+\mathrm{tg}^2\varphi/2)$, iz nje sledi

$$1/\cos\varphi - 1 \approx \frac{1 + (\varphi/2 + \varphi^3/24)^2}{1 - (\varphi/2 + \varphi^3/24)^2} - 1 \approx \frac{\varphi^2/2}{1 - \varphi^2/4}$$

kjer smo zopet višje potence argumenta φ opustili. V dobljeni zvezi pa lahko izpustimo še člen $\varphi^2/4$ v imenovalcu, kajti med izrazoma

$$A = \frac{\varphi^2/2}{1 - \varphi^2/4} \quad \text{in} \quad B = \varphi^2/2$$

je razlika $A - B = \varphi^4/8$, ki jo lahko zanemarimo. Torej dobimo približek $1/\cos\varphi - 1 \approx \varphi^2/2$ in $h \approx R.\varphi^2/2 \approx \underline{1.93 \text{ m}}$

Nazadnje si oglejmo, kako natančna sta približka (3) in (4) (kjer je $\alpha = 1/3$), za manjše in večje kote od dobljenega. Odgovor daje razpredelnica.

stopinje	φ	$\varphi + \varphi^3/3$	$\mathrm{tg}\varphi$
0,01	0,00017	0,00017	0,00017
0,1	0,00174	0,00174	0,00174
1	0,01745	0,01745	0,01745
10	0,17453	0,17630	0,17633
20	0,34907	0,36324	0,36397
30	0,52360	0,57145	0,57735
40	0,69813	0,81155	0,83910

Opazimo, da sta približka boljša pri manjših kotih in da je približek (4) (z α = 1/3) vedno boljši kot približek (3).

tgφ ni edina funkcija, ki se da aproksimirati s polinomom. Prav obratno je res! Tako rekoč vse običajne funkcije so take. Pogovor pa bi nas privedel predaleč, zato pika.

Drago Bajc