# PRESEK

**List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje**

ISSN 0351-6652
Letnik **28** (2000/2001)
Številka 1
Strani 48–51

Janez Strnad:

## RAČUNANJE IN NOGOMET

Ključne besede: zanimivosti, razvedrilo, matematika, kombinatorika, EURO 2000, možni izidi.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/28/1430-Strnad-nogomet.pdf

# RAČUNANJE IN NOGOMET

Po nastopu Slovenije na zaključnem turnirju EURO 2000 bo tudi kak bralec Preseka morda mislil, da je "nogomet najpomembnejša postranska stvar na svetu". Tako lahko nogomet uporabimo kot pretvezo za nekaj računov.

Na zaključnem tekmovanju, na katerem so pravila "določala vse od opreme do igralnega sistema in položaja kamer na štadionu", je bilo 16 moštev razvrščenih na 4 skupine s po štirimi moštvi in vsako je igralo z vsakim po eno tekmo. Moštvo je za dobljeno tekmo dobilo 3 točke, za neodločeno 1 točko in za izgubljeno 0 točk.

Vprašajmo se po številu različnih mogočih izidov, če imamo vsa moštva za enakovredna in se ne zanimamo za številske izide tekem. Vprašanje utegne biti za prave ljubitelje nogometa preveč neživljenjsko, a mladim matematikom ponuja nekaj zanimivosti iz *kombinatorike*.

Najprej se lotimo ene skupine z $n = 4$ člani. Na tekmovanju, na katerem igra vsak par le enkrat, je tekem toliko kot parov: $\frac{1}{2}n(n-1) = 6$. Tekme ločimo na *odločene* in *neodločene*. Različne možnosti opredelimo s številom odločenih tekem $z$. Po vrsti imamo $z = 0$ (0 odločenih tekem, $6 - z = 6$ neodločenih), $z = 1$, (1 odločena tekma, 5 neodločenih), ..., $z = 6$ (6 odločenih, 0 neodločenih). Skupno število točk je $3z + 2(6 - z) =$ $= 12 + z$, torej po vrsti 12, 13, ..., 18.

S tablico ponazorimo, kako so igrala moštva, a ne navedemo njihovih imen:

$$\begin{array}{cccc} * & (AB) & (AC) & (AD) \\ (BA) & * & (BC) & (BD) \\ (CA) & (CB) & * & (CD) \\ (DA) & (DB) & (DC) & * \end{array}$$

(BA) $= 0$, če je (AB) $= 3$, in (BA) $= 1$, če je (AB) $= 1$. Zato je dovolj, če si zapomnimo podatke iz desnega zgornjega dela tablice ((AB) (AC) (AD) (BC) (BD) (CD)).

Pri $z = 0$ je šest neodločenih tekem in je (111111) edina možnost.

Pri $z = 1$ je šest možnosti (311111), (131111), (113111), (111311), (111131), (111113) in še šest možnosti, v katerih trojko zamenjamo z 0, (011111) ..., torej skupaj 12 možnosti.

Pri $z = 2$ se število možnosti tako poveča, da jih ne navedemo, ampak raje o njih sklepamo. Podobno kot prej, začnemo s (331111) in nato obe trojki razvrstimo na druga mesta.

Šest različnih reči lahko razvrstimo na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ različnih načinov. Prvo reč namreč lahko postavimo na eno od 6 mest; ostane pet reči, od katerih lahko prvo postavimo na eno od 5 mest; ostanejo štiri reči ... Števila neodvisnih možnosti po *osnovnem izreku kombinatorike* množimo. Tako smo spoznali *permutacije brez ponavljanja*. V našem primeru pa sta dve reči (3 in 3) med seboj nerazločljivi in prav tako štiri reči (1111). S tem, da prvi dve reči premeščamo med seboj in štiri druge reči med seboj, ne dobimo novih možnosti. Tako je možnosti $6!/(4!2!) = 15$. To so *permutacije s ponavljanjem*.

Nato eno od trojk zamenjamo z 0, kar da (031111), in dobimo $6!/(1!1!4!) = 30$ možnosti. Nazadnje še preostalo trojko 3 zamenjamo z 0 in za (001111) dobimo še 15 možnosti. Tako imamo v celoti $15 + 30 + 15 = 60$ možnosti.

Pri $z = 3$ začnemo s (333111), ko je $6!/(3!3!) = 20$ možnosti. Eno trojko zamenjamo z 0 in dobimo (330111), kar da $6!/(2!3!) = 60$ možnosti. Prav toliko možnosti je za (003111) in toliko kot na začetku za (000111). Skupaj je torej $20 + 60 + 60 + 20 = 160$ možnosti.

Smo že pri $z = 4$. Začnemo s (333311), ko je $6!/(2!4!) = 15$ možnosti. Zamenjamo eno od trojk z 0, kar da (033311), in imamo $6!/(1!2!3!) = 60$ možnosti. Zamenjamo še eno od trojk z 0, kar da (003311), in imamo $6!/(2!2!2!) = 90$ možnosti. Tako nadaljujemo in pridemo še do (000311) s 60 in do (000011) s 15 možnostmi. Skupaj je torej $15 + 60 + 90 + 60 + 15 = 240$ možnosti.

Pri $z = 5$ začnemo s (333331), ko je $6!/(1!5!) = 6$ možnosti. Zamenjamo eno trojko z 0, kar da (033331), in imamo $6!/(1!1!4!) = 30$ možnosti. Zamenjamo še eno trojko z 0, kar da (003331), in imamo $6!/(1!2!3!) = 60$ možnosti. Zamenjamo še eno trojko z 0, dobimo (000331) in imamo prav tako 60 možnosti. Zamenjamo še eno trojko z 0, dobimo (000031) in imamo 30 možnosti. Zamenjamo še zadnjo trojko, dobimo (000001) in imamo, kot na začetku, 6 možnosti. Vseh možnosti je $6 + 30 + 60 + 60 + 30 + 6 = 192$.

Preostane le še $z = 6$, ko začnemo s (333333) z eno možnostjo. Sledijo (033333) s 6 , (003333) s 15 in (000333) z 20 možnostmi. Zaradi (000033), (000003) in (000000) dobimo še enkrat prvi dve števili in je vseh možnosti $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$.

Naštete možnosti se izključujejo, zato jih seštejemo: $1 + 12 + 60 + 160 + 240 + 192 + 64 = 729$. Rezultat preskusimo. Vsaka od šestih tekem ima za dano moštvo tri mogoče izide: zmago, neodločeno ali poraz. Tekem je 6, zato je vseh možnosti v skupini $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$. Nazadnje smo izračunali *variacije s ponavljanjem*.

Skupine so neodvisne druga od druge in vsako možnost iz kake skupine lahko sestavimo z vsako možnostjo iz drugih skupin. Zato števila pomnožimo in pri štirih skupinah dobimo $729 \cdot 729 \cdot 729 \cdot 729 = 3^{6\cdot 4} = 3^{24}$, približno $2{,}8243 \cdot 10^{11}$ možnosti.

Skupina A: 5 odločenih, skupna vsota točk 17

| | | ·1 | ·2 | ·3 | ·4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Portugalska | 1· | * | 3 | 3 | 3 | 9 |
| Romunija | 2· | 0 | * | 3 | 1 | 4 |
| Anglija | 3· | 0 | 0 | * | 3 | 3 |
| Nemčija | 4· | 0 | 1 | 0 | * | 1 |

Skupina B: 5 odločenih, skupna vsota točk 17

| | | ·1 | ·2 | ·3 | ·4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Italija | 1· | * | 3 | 3 | 3 | 9 |
| Turčija | 2· | 0 | * | 3 | 1 | 4 |
| Belgija | 3· | 0 | 0 | * | 3 | 3 |
| Švedska | 4· | 0 | 1 | 0 | * | 1 |

Skupina C: 4 odločene, skupna vsota točk 16

| | | ·1 | ·2 | ·3 | ·4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Španija | 1· | * | 3 | 0 | 3 | 6 |
| Jugoslavija | 2· | 0 | * | 3 | 1 | 4 |
| Norveška | 3· | 3 | 0 | * | 1 | 4 |
| Slovenija | 4· | 0 | 1 | 1 | * | 2 |

Skupina D: 6 odločenih, skupna vsota točk 18

| | | ·1 | ·2 | ·3 | ·4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nizozemska | 1· | * | 3 | 3 | 3 | 9 |
| Francija | 2· | 0 | * | 3 | 3 | 6 |
| Češka | 3· | 0 | 0 | * | 3 | 3 |
| Danska | 4· | 0 | 0 | 0 | * | 0 |

Po tem ko so moštva v skupinah igrala vsako z vsakim, sta se v nadaljnje tekmovanje uvrstili po dve najboljši moštvi iz vsake skupine. Ta moštva so igrala na izločanje, se pravi, da je po vsaki tekmi šlo v naslednji krog le moštvo, ki je zmagalo. Neodločenega izida ni bilo več. V vsaki od osmih tekem osmine finala sta bili dve možnosti, skupaj $2^8 = 64$ možnosti, pri štirih tekmah četrtfinala je bilo $2^4 = 16$ možnosti, v dveh tekmah polfinala še $2^2 = 4$ možnosti in v finalu še 2. Pri tekmovanju na izločanje jih je bilo torej vsega $2^{15} = 32768$. Ob tem se zavemo, da je bilo izbiranje moštev v drugem delu tekmovanja pri igranju na izločanje precej učinkovitejše kot pri igranju v skupinah. Tak način so najbrž izbrali, da bi bilo tekmovanje čim bolj privlačno, ob tem pa časovno omejeno. Nazadnje zmnožimo možnosti iz obeh delov tekmovanja in dobimo $3^{24} \cdot 2^{15}$, to je približno $9{,}2547 \cdot 10^{15}$, možnosti. Kdo bi si mislil, da bi bilo toliko možnosti, če bila moštva enakovredna!

S podobnim prijemom, ki ga spoznajo dijaki pri matematiki v srednji šoli, se, na primer, srečajo pri fiziki študentje drugega letnika fizike, ko v okviru kvantne statistične mehanike razvrščajo delce v množici na enodelčna stanja.

Iz previdnosti dodajmo še misel o zakonih narave in pravilih pri športu, ki bi ju rad tu in tam kdo vzporejal. O pravilih pri športu se navadno dogovorijo v okviru mednarodne zveze tako, da dogajanje opazovalce čim bolj pritegne, da je preprosto določiti vrstni red, in podobno. Pri nogometu je bil pred časom v veljavi dogovor, da dobi zmagovalec 2 točki in ne treh. Z novim dogovorom so najbrž dali vedeti, da velja le zmaga in je neodločen izid pravzaprav izhod v sili. Zakoni narave so nekaj čisto drugega. Raziskovalec po svoji presoji res vpelje kako količino in jo izmeri, a pri zakonih, ki navadno povzemajo zveze med količinami, ima zadnjo besedo preskus. Če se napoved zakona ne ujema z merjenji, je treba zakon zavreči ali predelati. Velja samo zakon, ki se sklada z opazovanji in merjenji.

Nekateri sociologi, ki so z družboslovnega vidika razglabljali o fiziki, so mnenja, da fiziki ustvarjajo zakone podobno kot mednarodna zveza pravila za šport. Toda glede tega se močno motijo. O tem nas prepričajo med drugim fiziki, ki so jih izidi poskusov pripravili do tega, da so spremenili svoje začetno stališče. Robert Andrews Millikan je podprl z merjenji Einsteinovo enačbo za kinetično energijo elektronov pri fotoefektu na kovini, čeprav na začetku zanjo ne bi dal počenega groša. Max Planck je nazadnje privzel, da črno telo s sevanjem izmenjuje energijo le v obrokih, čeprav je to nasprotovalo tedanjemu mnenju. Zato ne gre iskati podobnosti med zakoni fizike in pravili pri športu, čeprav z zgledi iz športa poskušamo pritegniti zanimanje učencev in dijakov za fiziko.

*Janez Strnad*