PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 1
Strani 33–35

Marko Razpet:

KRIVULJE IN HISOFT PASCAL

Ključne besede: računalništvo, matematika, rekurzivna formula, kotne funkcije, krivulja v parametrièni obliki, risanje krivulj na računalniku v Pascalu.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/869-Razpet.pdf

Naloge

1. Določi oba pozitivna korena enačbe $2^{-x} = 8x - x^3$.
2. Množica P naj bo potenčna množica množice M. Moč množice P je za 27 večja od moči množice M. Določi moč množice M.
3. Približno reši enačbe:
a) $x^2 = 2 + \ln x$
b) $\log_3 x = (x-2)^2$
c) $x.\ln x = 1$
d) $2^x = x + 2$
4. Kje se sečeta krivulji $y = 3^x$ in $y = x - 5$?

Marjan Jerman

Po gradivu *D. Grešaka*

Pripomba uredništva: če je bralcu gornji članek vzbudil zanimanje za numerično reševanje matematičnih problemov, potem mu priporočamo knjigo Zvonimir Bohte: Numerično reševanje enačb, ki je izšla v zbirki Sigma. Za razumevanje knjige bo seveda potrebno nekoliko več matematičnega znanja, kot ga zahteva pričujoči članek.

Sandi Klavžar

KRIVULJE IN HISOFT PASCAL

Spoznali smo že način, kako lahko s smotrno uporabo preprostih rekurzivnih formul z računalnikom hitro rišemo krivulje, ki se izražajo s kotnima funkcijama sin in cos. Ponovimo glavne rezultate, ki so zapisani v Preseku (letnik 14, 1986/87, št. 4 in 6). Če je

$$y_k = A\sin(\omega x_k + \phi),\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

kjer je $x_k = k\,\delta$ za izbrani korak $\delta > 0$, števila A, ω in ϕ pa so konstante, potem velja rekurzivna formula

$$y_{k+1} = c\,y_k - y_{k-1},\ k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

kjer je $c = 2\cos(\delta\omega)$. Če vzamemo $y_0 = A\sin\phi$ in $y_1 = A\sin(\delta\omega + \phi)$, potem lahko postopoma po formuli (2) dovolj natančno za risanje krivulj na računalniku izračunamo tudi števila $y_2, y_3, y_4, \ldots$ V posebnem primeru dobimo za $\phi = 0$ začetna člena $y_0 = 0$ in $y_1 = A\sin(\delta\omega)$, za $\phi = \pi/2$ pa $y_0 = A$ in $y_1 = A\cos(\delta\omega)$. Točke s koordinatami x_k in y_k nam v prvem primeru ponazarjajo potek sinusne, v drugem primeru pa potek kosinusne krivulje.

Tokrat si bomo ogledali krivuljo, ki je podana v parametrični obliki z relacijama

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin(kt)) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \tag{3}$$

```
10 PROGRAM KRIVULJA;
20 (* PROGRAM RISE KRIVLUJE *)
30 (* X = A * (T- SIN(K*T))         *)
40 (* Y = A * (1 - COS(T))          *)
50 CONST  PI = 3.141593;
60 VAR MAX, I, A, M, X, Y : INTEGER;
70      X0, X1, X2, Y0, Y1, Y2, C1, C2, F, K : REAL;
80      CH : CHAR;
90 PROCEDURE PLOT (U, V : INTEGER); (* NARISE TOCKO *)
100     BEGIN
110         INLINE (253, 33, 58, 92, 221, 70, 2, 221, 78, 4, 205, 229, 34);
120     END;
130 BEGIN
140     REPEAT
150         PAGE; WRITELN  ('A=');
160             REPEAT READ(A); UNTIL A > 0;
170         WRITELN ('M=');
180             REPEAT READ(M); UNTIL M > 0;
190         F := PI/M; C1 := 2*COS(F); MAX := ROUND(300/A/F);
200         WRITELN ('K='); READ(K);
210         C2 := 2*COS(K*F);
220         X0 := 0.0; X1 := SIN(K*F); Y0 := 1.0; Y1 := COS(F);
230         PAGE; WRITELN('A=', A, ' M=', M, ' K=', K:6:3);
240         FOR I := 0 TO 255 DO
250             BEGIN PLOT(I,24); PLOT(I,175); END;
260         FOR I := 24 TO 175 DO
270             BEGIN PLOT(0,I); PLOT(255,I); END;
280         FOR I := 0 TO MAX DO
290             BEGIN
300                 X := ROUND(A*(I*F-X0));
310                 Y := 32 + ROUND(A*(1 - Y0));
320                 IF (X>=0) AND (X<=255) AND (Y<=175)
                        THEN PLOT(X, Y);
330                 X2 := C2*X1 - X0; Y2 := C1*Y1 - Y0;
340                 X0 := X1; X1 := X2; Y0 := Y1; Y1 := Y2;
350             END ;
360             REPEAT CH := INCH UNTIL CH <> CHR(0);
370         PAGE;
380     UNTIL K = 0;
390     WRITELN ('KONEC');
400 END.
```

kjer je t parameter, ki teče po poljubno izbranem intervalu na številski premici, število a je pozitivno, število k pa poljubno realno. Zanima nas, kakšno krivuljo zariše v koordinatnem sistemu xy točka s koordinatama x in y, ko parameter t teče od 0 do neke končne pozitivne vrednosti. Za $k = 0$ dobimo iz (3)

$$x = at$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

oziroma $y = a\,(1 - \cos(x/a))$, kar pa nam ne prinese nič posebnega, dobimo namreč staro znanko – sinusoido, če pač gledamo le obliko krivulje. Za $k = 1$ dobimo že bolj zanimivo krivuljo, ki je podana z relacijama

$$x = a\,(t - \sin t)$$
$$y = a\,(1 - \cos t)$$

Imenuje se *cikloida*. Tako krivuljo opiše izbrana točka na krožnici, ki se brez drsenja kotali po neki premici.

Sedaj bi bil že čas, da napišemo računalniški program, ki nam bo risal krivulje, ki so podane s (3), in to za različni konstanti a in k. Napišimo ga v programskem jeziku PASCAL. Uporabili bomo verzijo HP4TM (HISOFT PASCAL), ki jo je v četrti številki Preseka (1985/86) predstavil Bojan Mohar. (glej program na str. 34)
Na začetku moramo vnesti števila A, M in K, pri čemer morata biti A in M pozitivni in celi. Število A predstavlja polovično višino krivulje, število M pa gostoto točk. Število K ustreza številu k v relacijah (3). Opozoriti je treba na to, da število M ni preveliko, ker je tedaj korak δ (v programu je to spremenljivka F) lahko zelo majhen in pri velikem številu točk pride do znatnih napak pri računanju koordinat točk. Smiselno je vzeti:

$$10 \leqslant A \leqslant 60$$
$$30 \leqslant M \leqslant 300$$
$$-10 \leqslant K \leqslant 10$$

Ko program nariše krivuljo, moramo pritisniti na poljubno tipko, da lahko vnesemo nove podatke. Če vstavimo za K število 0, se program konča.

Rekurzivno formulo (2) smo v programu uporabili dvakrat (vrstica 330) Sami pa lahko spremenite program tako, da vam bo risal še kake druge krivulje. Če na primer v vrsticah 300 in 310 pišemo

```
X := ROUND(A*X0) + 120; Y := ROUND(A*(1 - Y0)) + 32
```

potem dobimo krivulje, ki se v fiziki imenujejo *Lissajousove* (izg. lisažujeve) *figure*.

Marko Razpet