

O gravitaciji teles nepravilnih oblik

Peter Jevšenak

Šolski center Velenje, Gimnazija Velenje

Povzetek

Leta 2014 je vesoljska sonda Rosetta na Zemljo poslala slike nenavadnega nebesnega telesa, komet 67P, ki še najbolj spominja na sprimek dveh kep. Rosetta je na komet spustila tudi pristajalni modul Philae, ki se je po prostem padu zaradi majhne gravitacije od površine komet večkrat odbil, preden se je pritrdil na podlago. Ali se gravitacijsko polje takega nebesnega telesa razlikuje od gravitacijskega polja Zemlje le po jakosti? Ali se težni pospešek spreminja s kvadratom razdalje? Z računalniško simulacijo na poenostavljenem modelu komet smo ugotavljali lastnosti težnosti in prišli do zanimivih zaključkov.

Ključne besede: sonda Rosetta, komet 67P, gravitacijsko polje nebesnih teles

On the Gravity of Irregular Bodies

Abstract

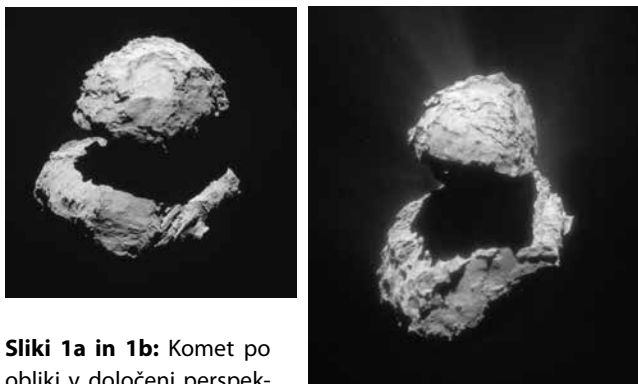
In 2014, the Rosetta space probe sent images of an unusual celestial body to Earth, the 67P comet, which resembles a conglomerate of two lumps. Rosetta also lowered the Philae lander onto the comet, which bounced off its surface several times after a free fall, before finally attaching itself to the ground. Does the gravitational field of such a celestial body differ from the gravitational field of Earth in anything other than magnitude? Does the gravitational acceleration change with the square of the distance? Using a computer simulation on a simplified model of the comet, we determined the properties of gravity and reached a few fascinating conclusions.

Keywords: Rosetta probe, 67P comet, gravitational field of celestial bodies

Uvod

Spomladi leta 2014, po desetih letih potovanja po Sončnem sistemu, je vesoljska sonda Rosetta dosegla svoj cilj – komet 67P/Churyumov-Gerasimenko (v nadaljevanju komet). Svet so obšle slike oddaljenega in nenavadnega sveta. Komet ima obliko dveh sprijetih oblastih kep. Večja kepa meri v premeru dobre štiri kilometre (slika 1). Novembra 2014 se je z Rosette odcepil modul Philae in pristal na površju komet. Pristanek ni potekal gladko, ampak se je Philae od površja večkrat odbil, preden se je končno zasedel v podlago. V okolici tako majhnega nebesnega telesa vladajo popolnoma drugačne razmere, kot smo jih vajeni na Zemlji, govorimo lahko o mikrogravitaciji. Po podatkih Evropske vesoljske agencije (ESA) se je Philae odbil od površja s hitrostjo počasne hoje, skoraj eno uro pa je trajalo, da se je ponovno dotaknil tal [1] [5]. Na Zemlji bi se to zgodilo v manj kot

sekundi. To je izzvalo začudenje in padla je odločitev, da z analizo gibanja modula Philae pridemo do težnega pospeška na mestu pristanka na kometu. Ker pa komet nima krogelne oblike kot večja nebesna telesa (zvezde, planeti, večje lune), težni pospešek verjetno odstopa od zakona $1/r^2$. V dostopni literaturi ni enostavno poiskati informacij o gravitaciji teles nepravilnih oblik ali o telesih, ki nimajo krogelne oblike. Poglavlja o gravitaciji se začno z Newtonovim gravitacijskim zakonom, kot primer pa je predstavljeno Zemljino težnostno polje. Pripisano je, da zaključki veljajo samo za telo okrogle oblike, kjer se gostota telesa spreminja izotropno z oddaljenostjo od središča. Ker se drugačna telesa ne omenjajo, smo se sami lotili izdelave računalniškega programa – simulacije gravitacijskega pospeška v izbrani točki v okolici poenostavljenega modela komet.



Sliki 1a in 1b: Komet po obliki v določeni perspektivi spominja na raco; zgornja manjša obla (glava) je prek vratu spojena s spodnjo večjo oblo (trupom) [4].

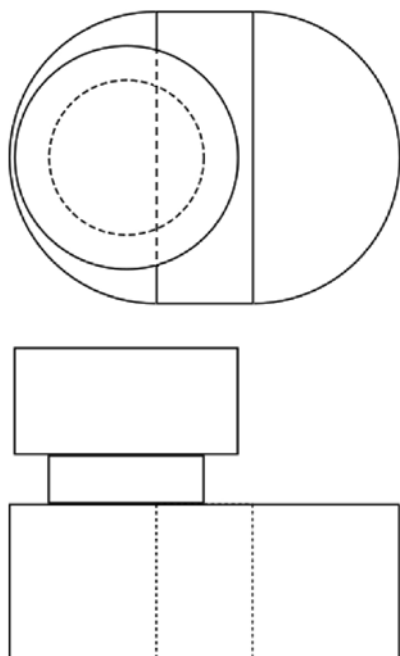
Geometrijski model kometa

Naš cilj je bil napisati program, ki bi na zaslonu narisal obris kometa v stranskem risu, nato pa bi izbrali poljubno točko na kometu ali v bližnji okolici in kot rezultat dobili težni pospešek v izbrani točki tako po velikosti kot po smeri. V ta namen smo morali kompleksno obliko kometa poenostaviti in ga spraviti v matematično obvladljivejšo obliko. Zamislili smo si ga takole (slika 2 in 3):

Manjša obla – zgornji element: valj premera 2,3 km in višine 1,1 km

Vrat – element v sredini: valj premera 1,6 km in višine 0,5 km

Večja obla – spodnji element: kvader dimenzij 1 km x 1,6 km x 3,0 km, vrinjen med dve polovici valja premera 3,0 km in višine 1,6 km



Slika 2: Tloris in stranski ris modela kometa.

Skrajni desni rob vratu je nad središčem spodnjega elementa. Zgornji in spodnji valj sta nameščena centralno drug nad drugim. Težišče kometa je po preračunu glede na znana težišča izbranih teles na stranskem risu 0,2 km levo in 0,43 km višje od središča spodnjega elementa. Vrat in zgornjo oblo smo malo prestavili glede na original, tako da smo dobili v tlorisu ravnino simetrije, če ga prerežemo po sredini. To ravnino potem v stranskem risu vidimo na zaslonu in težni pospešek se računa v točkah te ravnine. Mere so izbrane tako, da se volumna modela in izvirnika čim bolj ujemata.



Slika 3: Leseni model kometa v merilu 1 : 20 000.

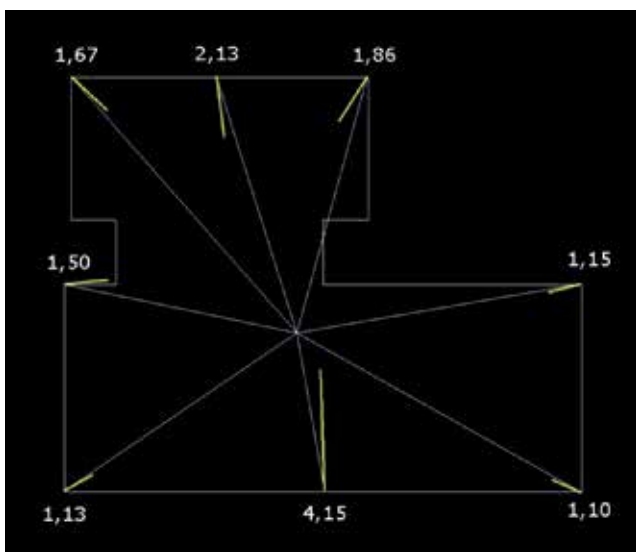
Gravitacijsko polje kometa

Z besedo komet mislimo na model kometa iz slike 3. Program je računal z naslednjimi podatki: masa je $1,0 \cdot 10^{13}$ kg, volumen (modela) je $21,7 \text{ km}^3$ ter gostota 463 kg/m^3 [2]. K odločitvi, da računamo težni pospešek samo v točkah simetrijske ravnine, sta prispevala predvsem dva dejavnika. Prvi je ta, da vektor težnega pospeška v izbrani točki te ravnine tudi leži v tej ravnini in ga lahko prikažemo dvodimenzionalno. Drugi pa je dejstvo, da se je modul Philae gibal približno po simetrijski ravnini, ko je pristajal na temenu zgornje oble kometa.

Programirali smo v računalniškem jeziku C++, ker je zelo primeren za reševanje matematičnih problemov. Ker pa ne vključuje grafike, smo si pomagali s knjižnicami SFML, ki služijo kot zvokovna in grafična razširitev jezika C++. Program deluje tako, da preučevano telo razreže na manjše dele, ki jih potem upošteva kot točkasta telesa, nato pa izračuna prispevek vsake take točke k težnemu pospešku v izbrani točki simetrijske ravnine po enačbi $\vec{g} = \frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$. Pospešek razstavi na pravokotni komponenti (po z-osi oz. v smeri pravokotno na središč-

ni prerez stranskega risa se zaradi simetrije komponente izničijo) in prispevke vseh točk sešteva po komponentah. Na koncu iz komponent izračuna velikost in smer in to se grafično prikaže na zaslonu.

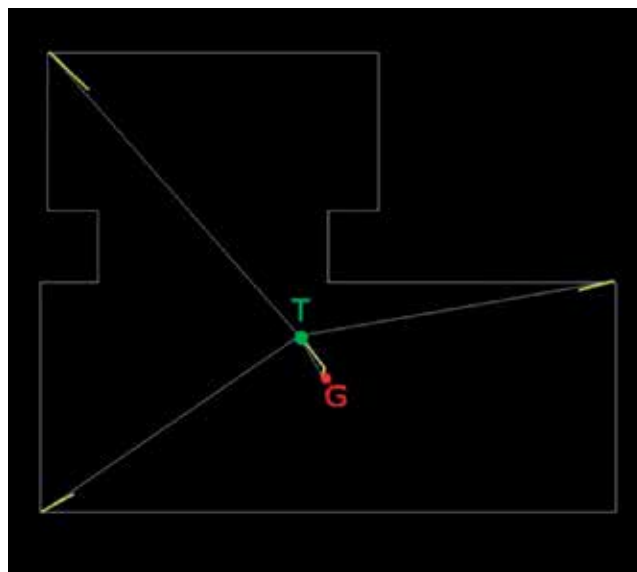
Program najprej določi položaj in maso vseh kosov. V našem primeru smo komet razdelili na 500.000 kosov, kar zadošča za natančnost približno 1 %. Nato se na zaslonu odpre grafično okno z obrisom kometa v stranskem risu kot na sliki 4. Izberemo poljubno točko grafičnega okna, znotraj, zunaj, na površini kometa, nakar se po končanem izračunu za lažjo orientacijo izriše zveznica med izbrano točko in težiščem kometa, hkrati pa se iz izbrane točke z rumeno barvo nariše še vektor težnega pospeška. Dolžina črte predstavlja relativno velikost, lega v ravnini pa smer težnega pospeška. Številčna vrednost težnega pospeška v izbrani točki se izpiše v sosednjem oknu, ki se odpre vzporedno h grafičnemu. Ko izberemo naslednjo točko, se stara slika ohrani in doda se težni pospešek v novi točki. Tako lahko spremljamo, kako se z razdaljo oziroma s premiki spreminja težni pospešek.



Slika 4: Težni pospešek v izbranih točkah na površini kometa; številčne vrednosti so prepisane iz vzporedno odprtega okna in jih je treba pomnožiti s faktorjem 10^{-4} m/s^2 . Točka v sredini, ki leži na sečišču črt, je težišče kometa.

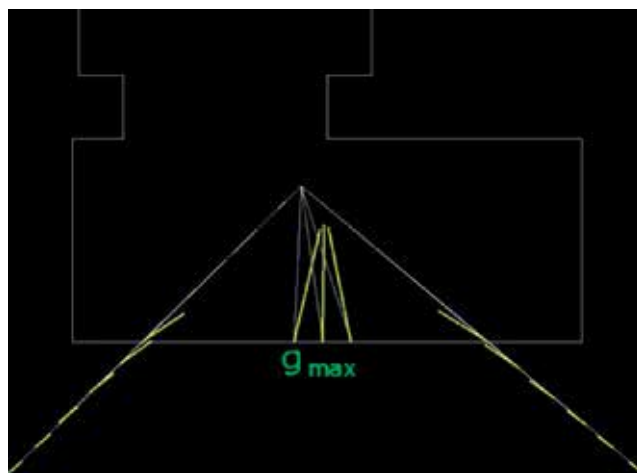
S slike 4 razberemo, da se težni pospešek spreminja, ko se premikamo po površju kometa. Rumene črte, ki predstavljajo velikost in smer pospeška, pa jasno nakazujejo, da težni pospešek **ne** kaže vedno proti težišču.

Za Zemljo velja, da je težišče tudi gravitacijsko središče, točka, kjer je težni pospešek enak nič. Na kometu pa težni pospešek v težišču znaša $1,34 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$. Če izberemo v nadaljevanju točko ob koncu rumene črte, ki predstavlja vektor težnega pospeška v težišču, pridemo na področje, kjer zabeležimo nenaden upad jakosti gravitacije, tudi za dva velikostna reda. Tukaj lahko iščemo gravita-



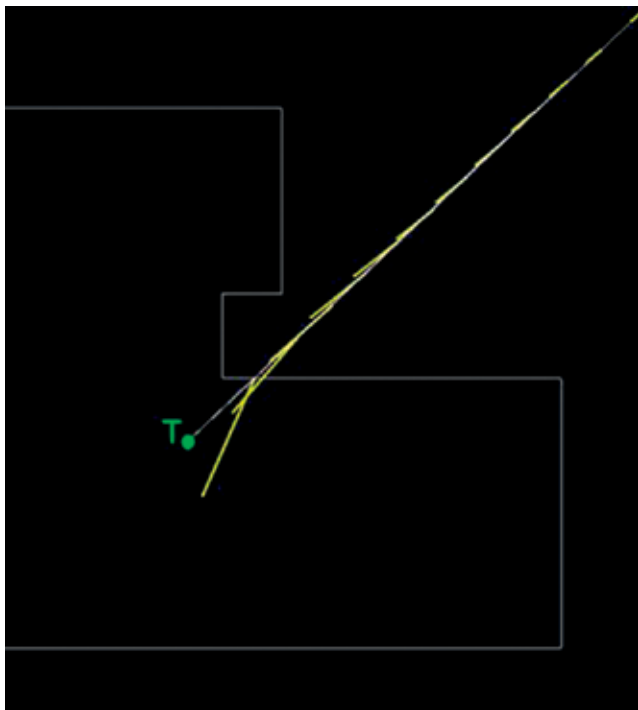
Slika 5: Točka G – gravitacijsko središče kometa; točka T – težišče.

cijsko središče kometa – točko G. To področje zavzema kvader, ki predstavlja centralni del spodnje oble kometa. Ta je razdeljen po vsaki dimenziji na 50 delov, kar pomeni 125.000 kosov dimenzij 20 m x 32 m x 60 m. Program vsak kvader upošteva kot točkasto telo z maso, zbrano v središču. Natančno lego točke G bi s poskušanjem našli le, če bi točka G sovpadala s središčem enega od kvadrov, kar pa je skrajno neverjetno. Poleg tega še velja, da premik za eno slikovno piko na grafičnem zaslonu pomeni premik za 6 m v merilu kometa. Če bi hoteli natančneje locirati gravitacijsko središče, bi morali spremeniti merilo na zaslonu in še precej bolj na drobno razdeliti telo. Vseeno pa lahko ocenimo, da sta točki G in T na kometu oddaljeni približno 330 m.



Slika 6: Področje okrog sredine spodnje ploskve je območje največjega težnega pospeška na kometu. Prikazane so tudi spremembe v smeri težnega pospeška pri približevanju spodnji ploskvi.

Največja težnost kometa je po sliki 6 na sredi spodnje ploskve, $g_{\max} = 4,16 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$. Pospešek na tem delu kaže izrazito proti središču spodnjega elementa in ne proti težišču kometa. Če bi v sistemu dveh teles spustili (v primerjavi s kometom majhno) telo, da prosto pada iz točke v vogalu slike 6 desno spodaj, se to telo ne bi gibalo po premici. V bližini površja se smer težnega pospeška vse bolj odmika od težišča in telo bi blago zavilo levo. Analizo smeri pospeška, ko se približujemo »vratu« kometa, kaže slika 7.



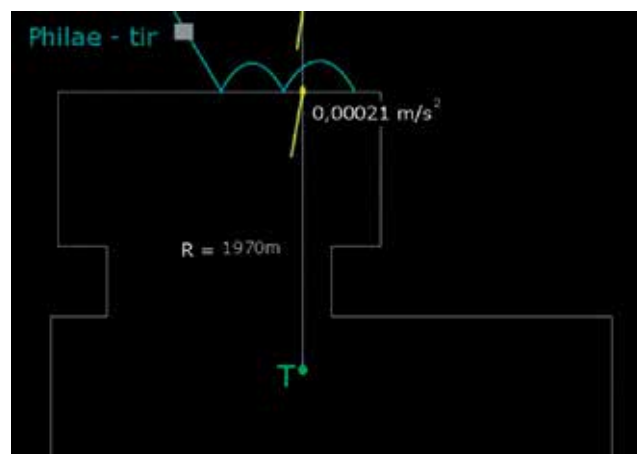
Slika 7: Smeri težnega pospeška pri približevanju proti »vratu« kometa.

S slike 7 razberemo, da oddaljeno telo pada proti težišču, bližje kometu pa posamezne masne gmote lokalno preglasijo celoto. Tako bi telo začelo rahlo zavijati proti valju, ki predstavlja zgornjo oble, nato pa bi pot nadaljevalo v nasprotni smeri, ko bi se dovolj približalo spodnjemu elementu. Točen potek tira ni bil cilj naše raziskave.

Preverjanje veljavnosti zakona $1/r^2$ v okolici kometa

Iz Newtonovega gravitacijskega zakona sledi, da težni pospešek pada s kvadratom razdalje od točkastega masnega telesa. Za takšno odvisnost od razdalje se je uveljavil izraz »zakon $1/r^2$ «. Sonda Rosetta je novembra 2014 izvedla poseben manever, da se je približala težišču kometa 67P na 22,5 kilometra. V ustreznem trenutku se je od Rosette odcepil pristajalni modul Philae in se pričel spuščati na komet. Spust je potekal balistično – brez po-

gona in vodenja, samo padajoče v šibki gravitaciji komete. Ob pristanku naj bi posebne noge s svedri in harpune poskrbele za pritrnitev modula na površino, vendar pritrnitev ni uspela. Philae se je prvič dotaknil površine na temenu zgornje oble, potem pa se je odbijal v smeri, kot približno kaže tir na sliki 8.

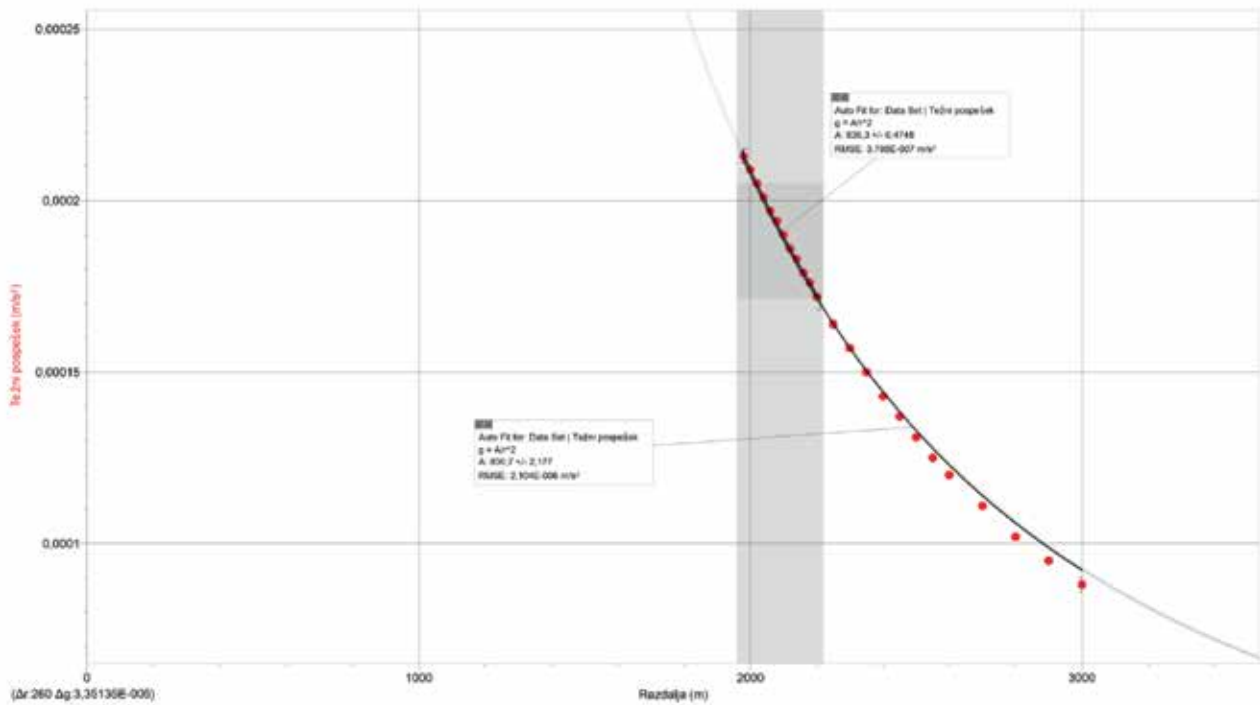


Slika 8: Področje preverjanja veljavnosti zakona $1/r^2$: tir je samo približen in ni v merilu.

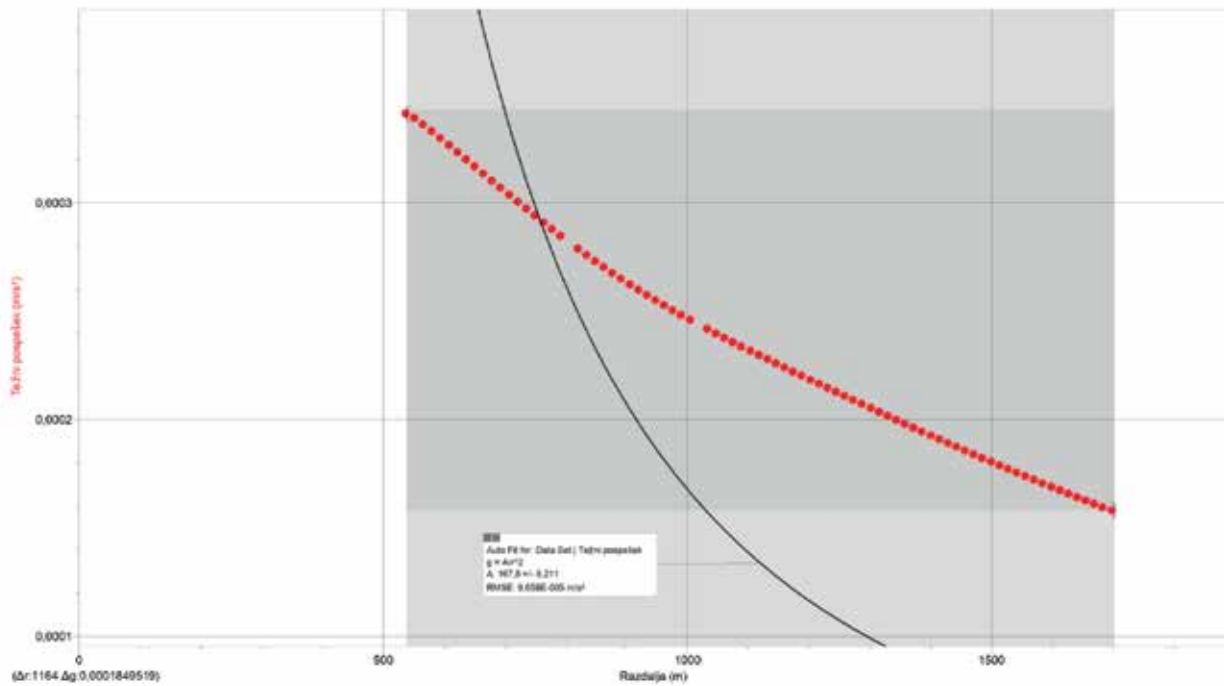
Program za izračun težnega pospeška smo prilagodili tako, da v poljubni smeri iz težišča navzven po izbranih korakih računa težni pospešek. Smer v programu smo nastavili navpično navzgor (razdalja od težišča do zgornje ploskve je 1970 m), ker tako na površini pridemo približno na mesto gibanja modula Philae. Za analizo njegovega gibanja – tako padanja proti kometu kot odbojev – moramo vedeti, kako se težni pospešek spreminja z razdaljo. Težni pospešek smo računali v 20-metrskih korakih, zanimalo so nas vrednosti od površja naprej. Izračunane podatke iz programa smo vnesli v program LoggerPro in nastal je graf 1. LoggerPro omogoča prilagajanje funkcij skozi vstavljene točke. Izbrali smo prilagoditveno funkcijo Ax^{-2} in jo uporabili enkrat na vseh točkah od površja do oddaljenosti 1 km (na razdaljah od težišča med 1970 m in 3000 m), drugič pa samo na točkah do oddaljenosti 220 m od površja (maksimalna višina po odboju) – sivo področje.

Vidimo, da obeh krivulj skoraj ne ločimo in da se krivulji na grafu 1 dobro prilegata točkam. Koefficient A v prilagoditveni krivulji je konstantni del enačbe $g = g_0 \frac{R^2}{r^2}$. S podatki $g_0 = 2,13 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$ in $R = 1970 \text{ m}$ dobimo za $g_0 R^2$ vrednost $827 \text{ m}^3/\text{s}^2$. Prilagoditev za vse točke je pokazala vrednost za A $831 \text{ m}^3/\text{s}^2$, za bližnje točke pa $836 \text{ m}^3/\text{s}^2$. Kaže, da zakon $1/r^2$ v tej smeri dobro velja tudi blizu površine.

Veljavnost zakona $1/r^2$ smo preverili v različnih smereh. Rezultati v smeri diagonale (podobno kot na sliki 7) so prikazani na grafu 2. Točke prikazujejo težni pospešek



Graf 1: Preverjanje veljavnosti zakona $1/r^2$ – smer navpično navzgor.



Graf 2: Preverjanje veljavnosti zakona $1/r^2$ – smer diagonala.

(g) od površine naprej, polna črta pa je prilagoditvena funkcija Ax^{-2} .

Površina je v tej smeri oddaljena od težišča za $R = 523$ m. V preučevani razdalji več kot kilometer od površja točke niti približno ne sledijo prilagoditveni krivulji in lahko rečemo, da tu zakon $1/r^2$ ne velja.

Zaključek

Z raziskavo smo spoznali, da težišče telesa v gravitacijskem polju blizu telesa ni tako pomembno, kot smo sprva mislili. V bližini komete ima na telo največji vpliv lokalno dominantna masa ob tiru. Posledica tega je spreminjanje smeri težnega pospeška in posledično telo ne pada po premici. Točko, kjer je težni pospešek enak nič, smo poimenovali gravitacijsko središče. V modelu komete 67P jo najdemo približno na zveznici med težiščem celotnega komete in težiščem spodnjega elementa (večje

oble). Zanimiva je tudi ugotovitev, da na izbočenih delih komete razmeroma dobro velja zakon $1/r^2$ za težni pospešek že od površine naprej, čeprav komet niti približno nima oblike krogle. Za večja vbočena področja (okrog vratu komete) pa zakon ne velja.

Ker smo potrdili veljavnost zakona $1/r^2$, smo lahko z analizo gibanja odbojev modula Philae (znana višina in čas) izračunali realni težni pospešek na mestu pristanka, $g_0 = 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$. S tem podatkom smo lahko izračunali maso komete, ki je $1,00 \cdot 10^{13} \text{ kg}$. Naš izračun se sklada z vrednostjo mase, ki jo navaja ESA.

Ta članek je izvleček iz raziskovalne naloge Mikrogravitacija kometov [3], ki je bila v šolskem letu 2015/16 izdelana na Gimnaziji Velenje. Na 50. Srečanju mladih raziskovalcev v Murski Soboti je bila razglašena za najboljšo nalogo s področja fizike ali astronomije. V nalogi lahko najdemo še podrobno analizo gibanja modula Philae med spustom na komet in odbojev od površine.

Viri in literatura

- [1] Arhiv člankov za misijo Rosetta na spletni strani ESA
http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Rosetta/%28archive%29/0 (10. 5. 2016).
- [2] Getting to know Rosetta's comet
http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Rosetta/Getting_to_know_Rosetta_s_comet (28. 4. 2016).
- [3] Jevšenak, L. (2016). *Mikrogravitacija kometov*. Raziskovalna naloga. Velenje: Šolski center Velenje.
- [4] Rosetta's target
<http://sci.esa.int/rosetta/14615-comet-67p/> (28. 4. 2016).
- [5] The Rosetta lander
http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Rosetta/The_Rosetta_lander (27. 4. 2016).