

Gradbeni vestnik • GLASILO ZVEZE DRUŠTEV GRADBENIH INŽENIRJEV IN

TEHNIKOV SLOVENIJE in MATIČNE SEKCIJE GRADBENIH

INŽENIRJEV INŽENIRSKO ZBORNICE SLOVENIJE

UDK-UDC 05 : 625; ISSN 0017-2774

Ljubljana, marec 2007, letnik 56, str. 53-80

Izdajatelj:

Zveza društev gradbenih inženirjev in tehnikov Slovenije (ZDGITS), Leskoškova 9e, 1000 Ljubljana, telefon 01 52 40 200; faks 01 52 40 199 v sodelovanju z **Matično sekcijo gradbenih inženirjev Inženirske zbornice Slovenije (MSG IZS)**, ob podpori **Javne agencije za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije, Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani** in **Zavoda za gradbeništvo Slovenije**

Izdajateljski svet:

ZDGITS: **mag. Andrej Kerin**
izr. **prof. dr. Matjaž Mikoš**
Jakob Presečnik

MSG IZS: **Gorazd Humar**
mag. Črtomir Remec

doc. dr. Branko Zadnik
FGG Ljubljana: **doc. dr. Marijan Žura**
FG Maribor: **Milan Kuhta**
ZAG: **prof. dr. Miha Tomažević**

Glavni in odgovorni urednik:

prof. dr. Janez Duhovnik

Sodelavec pri MSG IZS:

Jan Kristjan Juteršek

Lektorica:

Alenka Raič Blažič

Lektorica angleških povzetkov:

Darja Okorn

Tajnica:

Anka Holobar

Oblikovalska zasnova:

Mateja Goršič

Tehnično urejanje, prelom in tisk:

Kočevski tisk

Naklada:

3000 izvodov

Podatki o objavah v reviji so navedeni v bibliografskih bazah COBISS in ICONDA (The Int. Construction Database) ter na

<http://www.zveza-dgits.si>

Letno izide 12 števil. Letna naročnina za individualne naročnike znaša 22,95 EUR; za študente in upokojene 9,18 EUR; za družbe, ustanove in samostojne podjetnike 169,79 EUR za en izvod revije; za naročnike iz tujine 80,00 EUR. V ceni je všteti DDV.

Poslovni račun ZDGITS pri NLB Ljubljana:

SI56 0201 7001 5398 955

Navodila avtorjem za pripravo člankov in drugih prispevkov

- Uredništvo sprejema v objavo znanstvene in strokovne članke s področja gradbeništva in druge prispevke, pomembne in zanimive za gradbeno stroko.
- Znanstvene in strokovne članke pred objavo pregleda najmanj en anonimen recenzent, ki ga določi glavni in odgovorni urednik.
- Besedilo prispevkov mora biti napisano v slovenščini.
- Besedilo mora biti izpisano z znaki velikosti 12 pik z dvojnimi presledkom med vrsticami.
- Prispevki morajo imeti naslov, imena in priimke avtorjev ter besedilo prispevka.
- Besedilo člankov mora obvezno imeti: naslov članka v slovenščini (velike črke); naslov članka v angleščini (velike črke); oznako ali je članek strokoven ali znanstven; nazive, imena in priimke avtorjev ter njihove naslove; naslov POVZETEK in povzetek v slovenščini; naslov SUMMARY in povzetek v angleščini; naslov UVOD in besedilo uvoda; naslov naslednjega poglavja (velike črke) in besedilo poglavja; naslov razdelka in besedilo razdelka (neobvezno); ..., naslov SKLEP in besedilo sklepa; naslov ZAHVALA in besedilo zahvale (neobvezno); naslov LITERATURA in seznam literature; naslov DODATEK in besedilo dodatka (neobvezno). Če je dodatkov več, so dodatki označeni še z A, B, C, itn.
- Poglavlja in razdelki so lahko oštevilčeni.
- Slike, preglednice in fotografije morajo biti omenjene v besedilu prispevka, oštevilčene in opremljene s podnapisi, ki pojasnjujejo njihovo vsebino. Vse slike in fotografije v elektronski obliki (slike in običajnih vektorskih grafičnih formatih, fotografije v formatih .tif ali .jpg visoke ločljivosti) morajo biti v posebnih datotekah, običajne fotografije pa priložene.
- Enačbe morajo biti na desnem robu označene z zaporedno številko v okroglem oklepaju.
- Kot decimalno ločilo je treba uporabiti vejico.
- Uporabljeni in citirana dela morajo biti navedena med besedilom prispevka z oznako v obliki: (priimek prvega avtorja, leto objave). V istem letu objavljena dela istega avtorja morajo biti označena še z oznakami a, b, c, itn.
- V poglavju LITERATURA so uporabljena in citirana dela opisana z naslednjimi podatki: priimek, ime prvega avtorja (lahko okrajšano), priimki in imena drugih avtorjev, naslov dela, način objave, leto objave.
- Način objave je opisan s podatki: knjige: založba; revije: ime revije, založba, letnik, številka, strani od do; zborniki: naziv sestanka, organizator, kraj in datum sestanka, strani od do; raziskovalna poročila: vrsta poročila, naročnik, oznaka pogodbe; za druge vrste virov: kratek opis, npr. v zasebnem pogovoru.
- Prispevke je treba poslati glavnemu in odgovornemu uredniku prof. dr. Janezu Duhovniku na naslov: FGG, Jamova 2, 1000 LJUBLJANA oz. janez.duhovnik@fgg.uni-lj.si. V spremnem dopisu mora avtor članka napisati, kakšna je po njegovem mnenju vsebina članka (pretežno znanstvena, pretežno strokovna) oziroma za katero rubriko je po njegovem mnenju prispevek primeren. Prispevke je treba poslati v enem izvodu na papirju in v elektronski obliki v formatu MS WORD in v 8. točki določenih grafičnih formatih.

Uredništvo

Vsebina • Contents

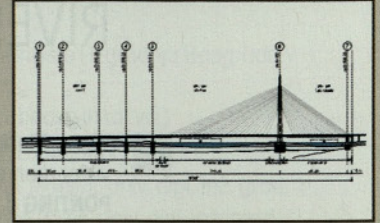
Članki • Papers

stran **54**

Viktor Markelj, univ. dipl. inž. grad.

PROJEKT MOSTU PREKO SAVE V BEOGRADU

DESIGN OF THE BRIDGE OVER SAVA RIVER IN BELGRADE

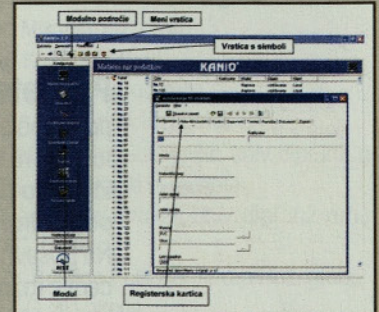


stran **63**

Franc Maleiner, univ. dipl. inž. kom.

RAČUNALNIŠKI SISTEM UPRAVLJANJA IN VODENJA OBRATOVANJA KANIO®

COMPUTERIZED MAINTENANCE MANAGEMENT SYSTEM KANIO®



stran **68**

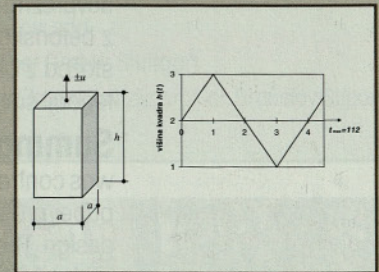
dr. Tomaž Rojc, univ. dipl. inž. grad.

O MULTIPLIKATIVNI TEORIJ HIPERELASTO-PLASTIČNIH TELES PRI VELIKIH DEFORMACIJAH IN OBJEKTIVNOSTI NUMERIČNIH ALGORITMOV

II. DEL: INTEGRACIJSKI ALGORITMI

USE OF MULTIPLICATIVE THEORY OF HYPERELASTO-PLASTIC BODIES
AT LARGE STRAINS AND OBJECTIVITY OF NUMERICAL ALGORITHMS

PART II: INTEGRATION ALGORITHMS



Cenik oglasov

Novi diplomanti gradbeništva

J. K. Juteršek, univ. dipl. inž. grad.

Koledar prireditev

J. K. Juteršek, univ. dipl. inž. grad.

Slika na naslovnici: 3D prikaz novega mostu v Beogradu, avtor Ponting Maribor

PROJEKT MOSTU PREKO SAVE V BEOGRADU

DESIGN OF THE BRIDGE OVER SAVA RIVER IN BELGRADE

Viktor Markelj, univ. dipl. inž. grad.

viktor.markelj@ponting.si

PONTING d.o.o., Maribor,

www.ponting.si

Strokovni članek

UDK 624.21 : 625.745.1

Povzetek | Po zmagi na mednarodnem natečaju je inženirski biro Ponting pridobil pogodbo za izdelavo idejnega projekta za most preko Save v Beogradu, ki bo uporabljen tudi kot razpisni projekt. V članku je prikazana zasnova mostu in tehnične rešitve iz tega idejnega projekta. Glavni most z dolžino 929 m ter širino 45 m je zasnovan kot most s poševnimi zategami z enim pilonom ter ekscentrično postavljenimi poševnimi zategami. Na poševnih zategah sta razpona 200 in 375 m, ki se nadaljujeta z neprekinjenim nosilcem z razponi od 70 do 108 m. Most ima 6 pasov za cestna vozila, 2 tira za lahki metro ter na obeh straneh še prostor za pešce in kolesarje. Prečni prerez voziščne grede je sovprežna konstrukcija, sestavljena iz jeklenih nosilcev škatlastega prereza višine 4,5 m z betonsko voziščno ploščo debeline 25 cm. Unikaten pilon z višino 200 m ima obliko stožca z okroglim prerezom. Tako zasnovan most bo predstavljal svetovni rekord v kategoriji sovprežnih mostov z enim pilonom. Začetek gradnje je predviden v letu 2008.

Summary | Winning the international design competition, Ponting design office was contract awarded for the tender design of the bridge over Sava River in Belgrade. The paper presents the conceptual design and technical solutions on the basis of the tender design. The main bridge is 929 m long and 45 m wide and is designed as a cable-stayed bridge with one pylon and eccentric stay cables. The cable-stayed bridge has two spans of 200 and 375 m, with additional continuous spans from 70 to 108 m. The superstructure of the bridge carries a 6 lane main road, 2 tracks for city railways and a pedestrian and cyclist area on both outer sides. In the cross section the main girder is designed as a composite structure, made of two steel box-shaped 4,5 m high longitudinal girders, connected with steel cross beams and a 25 cm thick concrete slab at the top. A unique 200 m high cone-shaped pylon has a circular cross section. A bridge of such design would set a world record in the category of composite cable stayed bridges with only one pylon. The beginning of construction is expected in the year 2008.

1 • UVOD

Z zmago na mednarodnem natečaju v začetku leta 2005 je Inženirski biro Ponting iz Maribora pridobil pogodbo za izdelavo idejnega in razpisnega projekta za most na spodnji konici savskega otoka Ade Ciganlije. Mesto Beograd in njegova Direkcija za gradbena zemljišča in izgradnjo sta v drugi polovici leta 2004 razpisala omenjeni natečaj za

most, ki bo najpomembnejši objekt bodočega notranjega magistralnega polprstana kot nujnega elementa za prometno rešitev tega dvomilijonskega mesta.

Mednarodni, javni in anonimni natečaj je vzbudil precej interesa, saj je podloge dvignilo kar 27 potencialnih ponudnikov iz Srbije in tujine, do roka za oddajo rešitev pa je svoje

ponudbe oddalo 11 ponudnikov. Devetčlanska komisija, ki ji je predsedoval akademik prof. dr. Nikola Hajdin, znani graditelj mostov, je na prepričljivo prvo mestu postavila idejno rešitev firme Ponting d.o.o. Maribor. Pomen zmage na natečaju je toliko večji, če vemo, da so svoje rešitve in ponudbe dale tudi najpomembnejše svetovne firme s področja projektiranja mostov, kot so danski COWI; Ramboll in Sund & Baelit Partner; nemški Schlaich Bergermann und Partner in Obermaeyer; norveški Juton; fakulteta s Hrvaške

PROJEKT MOSTU PREKO SAVE V BEOGRADU

Tip konstrukcije: Most s poševnimi zategami

Velikost: $L = 929$ m, $B = 45$ m, $A = 41.805$ m²Statični razpon / višina: $L_{max} = 375$ m, $H_{pil} = 200$ m

Predračunska vrednost: 90 mio evrov

Čas gradnje: 2008–2010

Investitor: Direkcija za građevinsko zemljište i izgradnju Beograda u sodelovanju z

EBRD (Evropska banka za obnovo in razvoj)

Projektant: PONTING inženirski biro d.o.o., Maribor

Odgovorni projektant: Viktor Markelj, univ. dipl. inž. grad.

Račun konstrukcije: Dušan Rožič, univ. dipl. inž. grad.

Rok Mlakar, univ. dipl. inž. grad.

Načrti in popisi del: Miha Marinič, inž. grad.

Irena Košti, inž. grad.

Milena Karner, grad. teh.

Simon Sever, dipl. inž. grad.

Zunanji sodelavci: prof. mag. Peter Gabrijelčič, univ. dipl. inž. grad.,

UL FA, oblikovanje in makete

prof. dr. Andrej Štrukelj, univ. dipl. inž. arh.,

UM FG, Cosmos

as. dr. Boštjan Pulko, univ. dipl. inž. grad.,

UL FGG, 3D-plaxis

Danijel Čelig, univ. dipl. inž. arh., 3D prikazi

Študije: DDC d.o.o. Ljubljana, CPV Novi sad

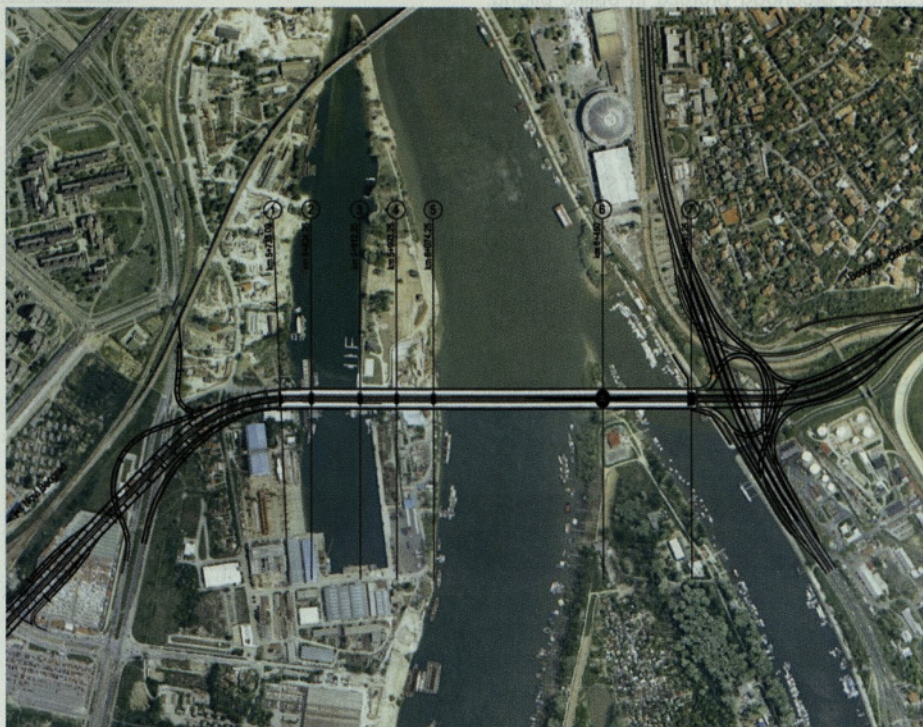
Kontrolni račun: Leonhardt, Andra und Partner GmbH, Stuttgart

Revizija: Gradbena fakulteta Beograd, koord. revizije prof. dr. Bratislav Stipanić

Konzultant EBRD: Buckland & Taylor, Kanada

ter domače firme in fakultete iz Srbije, ki imajo vse izvedene referenčne mostove. Zmagovalno idejno rešitev je zasnovala avtorska skupina iz inženirskega biroja PONTING d.o.o. s sodelujočim arhitektom prof. mag. Petrom Gabrijelčičem s Fakultete za arhitekturo Ljubljana.

Z razpisom je bila predvidena tudi oddaja del za tri študije 1. faze te prometnice, in sicer za študijo upravičenosti, študijo vplivov na okolje ter strategijo oddaje del naslednjih faz projektiranja in izgradnje. Pogodbena vrednost del za projekt in študije je skupaj s dvema aneksoma znašala 0,96 milijona evrov, Ponting pa jo je izvedel skupaj s pogodbenimi partnerji DDC d.o.o. Ljubljana in CPV d.d. iz Novoga Sada. V tem prispevku bodo prikazane osnovne tehnične značilnosti popolnoma originalne rešitve mostu na izjemni lokaciji, ki povezuje stari in novi Beograd.



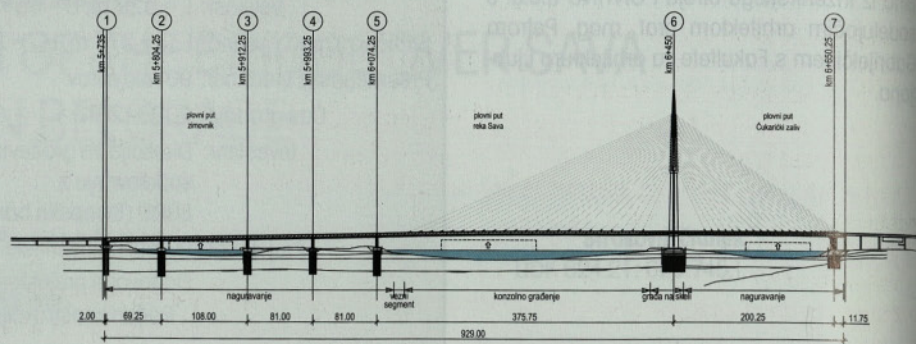
Slika 1 • Situacija na ortofoto karti. Novi Beograd je na levem bregu, zaliv ladjedelnice, Sava, konica Ade, zaliv Čukarički in Topčider so na desnem bregu

2 • ZASNOVA MOSTU

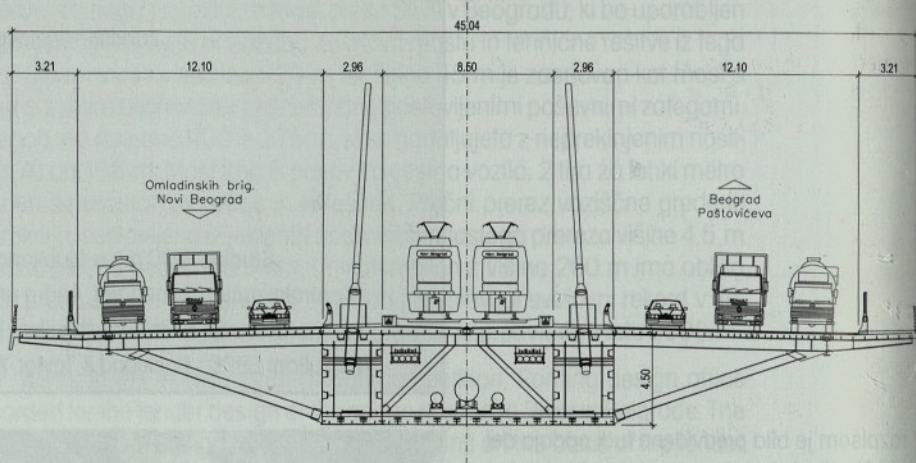
Most prečka kar tri vodna področja v dolžini enega kilometra. Če gledamo v smeri stacionaže iz Novega Beograda na levem bregu Save, most najprej prečka ladjedelnico s tako imenovanim prezimovališčem za ladje, kjer je vodni rokav širok približno 130 m, ter pas kopnega v širini približno 170 m, sledi reka Sava v vodni širini 35 m v osi s plovno potjo širine 150 m. Po spodnji konici otoka Ada Ciganlija, kjer je glavna podpora – to je pilon, je potrebno premostiti še zaliv Čukarički v širini 170 m, kjer je desni breg pod Topčiderskim hribom. Kot prečkanja z obalami se spreminja od 90° do 60°, most pa se na obeh straneh nadaljuje še z dostopnimi viadukti v skupni dolžini več kilometrov, ki pa niso bili predmet idejnega projekta. Niveleta mostu je na višini 20 do 23 metrov nad vodno gladino. Vzдолžni raspored podpor sledi naštetim oviram s statičnimi razponi:

$70 + 108 + 2 \times 81 + 375 + 200 + 14 = 929$ m. Dva glavna asimetrična razpona 375 m in 200 m sta premoščena s poševnimi kabli, obešenimi na en centralni pilon, preostali razponi dolžine 70 in 108 m pa so premoščeni z neprekinjenim nosilcem z enakim prečnim prerezom kot na obešenem delu.

Posebnost in inovativnost te rešitve izhajajo iz zasnove prečnega prereza in oblike pilona. Vsa prometna površina, to je 2-krat po trije vozni cestni pasovi, dve progi za lahka tirna vozila (lahki metro) ter seveda pešci in kolesarji, je v isti horizontalni ravnini. S celotnim prometom v eni etaži namesto v dveh smo dobili vitko konstrukcijo. Slaba stran take rešitve pa je velika širina prečnega prereza, ki zaradi dolgih konzol onemogoča obešanje samo v sredini, pri obešanju po zunanjih robovih pa dobimo zelo velik odločilni prečni razpon.



Slika 2 • Vzдолžni prerez z razponi $70 + 108 + 2 \times 81 + 375 + 200 + 14 = 929$ m



Slika 3 • 45 m široka konstrukcija je obešana na dve liniji kablov, ki sta pritrjeni med površinami za tirni in cestni promet

Zato smo prometno površino razdelili na tri dele, notranji del je namenjen prometu tirnih vozil, oba zunanja dela pa cestnemu prometu in pešcem. Vmesne ločilne pasove smo izkoristili za podpiranje obešene konstrukcije s poševnimi zategami na prečnem razmaku

13,5 m. Na ta način smo dobili centralni torzijsko togi nosilec ter obojestranske konzole v dolžini ca. 15 m, ki so podprte z diagonalami naklona $L/h = 10/4,5$. Isti vmesni prostor – ločilne pasove – smo izkoristili tudi za postavitve razcepljenega pilona skozi vozišče.

3 • GLAVNI NOSILNI SISTEMI

Pri mostovih s poševnimi kabli imamo praviloma tri glavne nosilne elemente, to so voziščna greda, poševne zatege ter pilon. To so nosilni elementi na glavnem 375 m in krajnem 200 m dolgem razponu, pri čemer nikakor ne moremo mimo nateznega opor-

nika, ki prenaša dvižno silo krajne zatege (back-stays). Na preostalem delu mosta, kjer ni poševnih zateg, je nosilni sistem neprekinjena voziščna greda – enaka kot na obešenem delu, ki deluje kot kontinuirni nosilec v razponih $70 + 108 + 81 + 81$ m. Vo-

ziščna greda je sovprežna konstrukcija, pilon je betonski, zatege pa so iz visokovrednih pletenih jeklenih vrvi.

Voziščna greda

Voziščna greda – prekladna konstrukcija je sovprežna jeklena konstrukcija kvalitete S355 z betonsko voziščno ploščo visoke trdnosti debeline 25 cm.

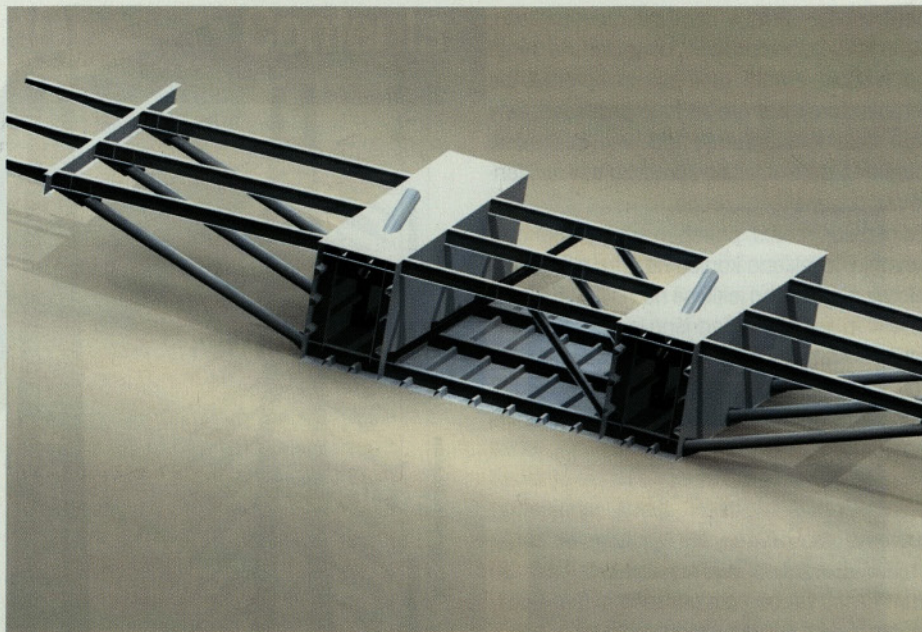
Osnovo predstavljata dve jekleni škatli z višino 4,5 m ter širino 3 m, v kateri so sidrane poševne zatege. Škatli sta povezani v torzijsko celico dimenzije 4,5 x 14,5 m, ki je na obe strani podaljšana s konzolno konstrukcijo iz valjanih profilov ter tlačnimi diagonalami iz okroglih jeklenih cevi. Skupna višina prečnega prereza (jeklo 4,5 m in voziščna plošča 0,25 m) znaša 4,75 m.

Konstrukcija ima osnovni vzdolžni raster 4,5 m, na katerem so vsi prečni nosilci, diagonale in prečne ojačitve pločevinastih delov. V glavnem razponu je konstrukcija podprta na razdalji 13,5 m (3 x 4,5), v krajnih razponih pa na razdalji 9 m (2 x 4,5 m). Na spoju prečnih IPB 600 in diagonal $\Phi 457/20$ mm je vzdolžni nosilec IPB 800, ki zagotavlja porazdelitev prometne obtežbe na večjo razdaljo.

Oba glavna jeklena nosilca sta varjena iz pločevine S355, z debelino stojine 16 mm (nad podporami lokalno do 28 mm), debelina zgornje in spodnje pasnice se prilagaja obremenitvam ter znaša od 30–80 mm za zgornjo pasnico (širina 2 x 3000 mm), debeline 25–45 mm za spodnjo pasnico (širina 2 x 3000 mm) ter 14–25 mm za spodnjo vezno pločevino med obema škatlama (širina 8500 mm). Pločevine so vzdolžno podprte oz. ojačene s Hoeshovimi U profili dimenzij 400/250/8 mm, na mestu z dvojnimi betonskim sovpreganjem pa s T nosilci višine 300 mm. Vse vzdolžne ojačitve pa so podprte s prečnimi T nosilci z višino 600 mm na vzdolžnem rastru 4500 mm.

Na opisani jekleni konstrukciji se po montaži postopno gradi tudi tlačna voziščna plošča debeline 25–27 cm iz betona trdnosti C45/55 in C 50/60. Plošča je v glavnem enosmerno nosilna v vzdolžni smeri na rastru 4,5 m. Poleg lokalnega upogiba zaradi prometa deloma prevzema tudi globalno tlačno komponento poševnih zateg, ki raste in se povečuje v smeri proti pilonu. Na delu nad konzolami je plošča izdelana in montažnih elementov (starih najmanj 3 mesece) zaradi zmanjšanje vpliva krčenja in lezenja. V središčnem delu širine 14,5 m je plošča izvedena kot monolitna in je del torzijskega sistema voziščne grede.

V bližini pilona je zaradi velikih tlakov dodana tudi spodnja sovprežna AB plošča (dvojno sovpreganje). Spodnja AB plošča se podaljšuje tudi skozi celotni krajši 200 m dolgi razpon za uravnotežitev stalne obtežbe in povečanje togosti grede na tem delu. Vse plošče so sovprežene s pomočjo strižnih trnov z glavami (tip Nelson) premera $\Phi 19$ in $\Phi 22$ mm



Slika 4 • Sestava jeklenega dela prekladne konstrukcije

po statičnem izračunu in konstruktivnih zahtevah.

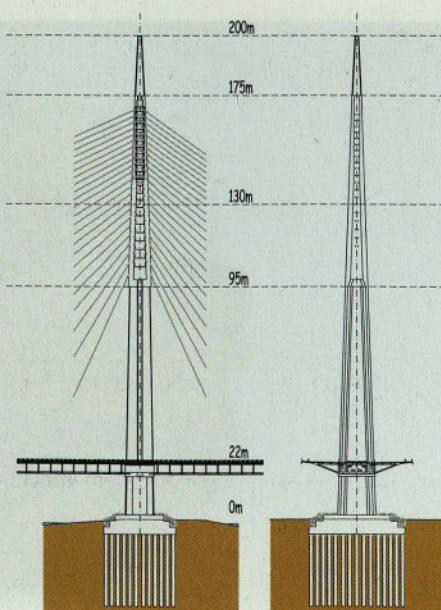
Sorazmerno visoka greda ($L/H=375/4,75=79$) aktivira veliko število kablov pri prometni obtežbi, rezultat česar so manjše deformacije in vibracije, kar je še posebej pomembno pri tirnih vozilih.

Pilon

Naloga pilona v sistemu mostu je podpiranje poševnih zateg. Opisana zasnova prečnega prereza omogoča prav posebej oblikovan pilon, ki je inovativen in originalen v svetovnem merilu. Gre za modificiran centralno postavljen pilon v obliki pravilnega stožca, skozi katerega v spodnjem razcepljenem delu poteka tirni promet. Pilon ima nad temeljem premer 16 m, na vrhu betonskega dela na višini 175 m ima premer 4 m. Razcepljen je do višine 95 m, kjer se dve nogi združita v enotni krožni prerez $\Phi 9,5$ m. Zaradi nastale simbole oblike smo pilon še simbolno podaljšali do višine 200 m z jekleno konstrukcijo, kjer je osvetlitev ter naprave za monitoring. Istočasno ta oblika pilona omogoča kompakten, racionalen in ekološko sprejemljiv način temeljenja. Material, iz katerega je narejen pilon, je armirani beton visoke trdnosti C 50/60, rebrasta armatura S500 ter prednapete palice lokalno ob sidriščih.

Zaradi vertikalnega pilona z majhnim in konstantnim nagibom sten je tudi izgradnja dokaj enostavna z opazem, ki lahko spremlja tako obliko. Dolžine taktov so v spodnjem delu lahko okoli 4 m v zgornjem delu pa so takti diktirani z razmakom sidrišč kablov od 3,5 m do 2,5 m na vrhu pilona.

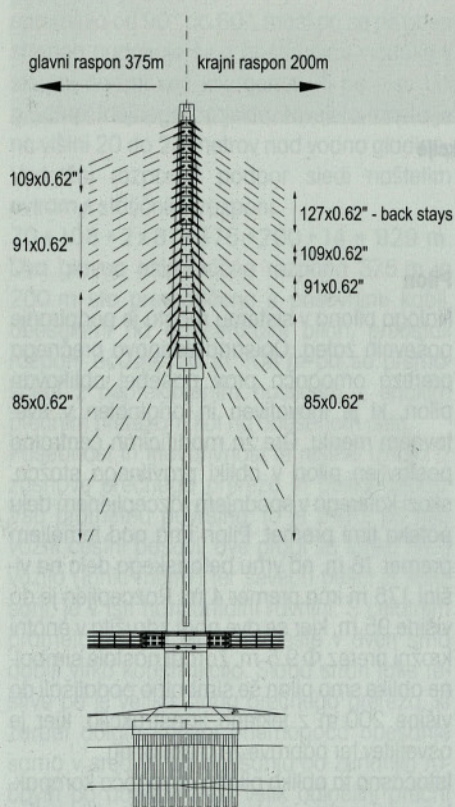
Ker je pilon en sam, smo točko na stiku grede in pilona privzeli kot fiksno točko za prevzem horizontalnih sil. Ta tako imenovani spoj grede – pilon prevzema z upogibom vse vzdolžne



Slika 5 • Pilon mostu

obremenitve iz faze uporabe (zavorna sila, vzdolžni veter na pilon in zatege ter sile trenja na ležiščih zaradi reologije in spremembe temperature). Ker gre za togo povezavo, se v tem delu koncentrirajo tudi vse seizmične obremenitve, kar je bilo zaradi zahtev revidentov še posebej analizirano.

Edini detajl mostu, potreben zgolj zaradi oblikovanja, je jeklena konica na vrhu pilona. Konica iz nerjavnega jekla se na višini 25 m zoži iz $\Phi 4$ m na $\Phi 1$ m. Zvarjena je iz pločevine in ojačilnih reber. Zaradi velike razlike v masi in togosti med osnovnim pilonom in dodano konico ni posebnih nevarnosti za morebitni nastanek resonance.

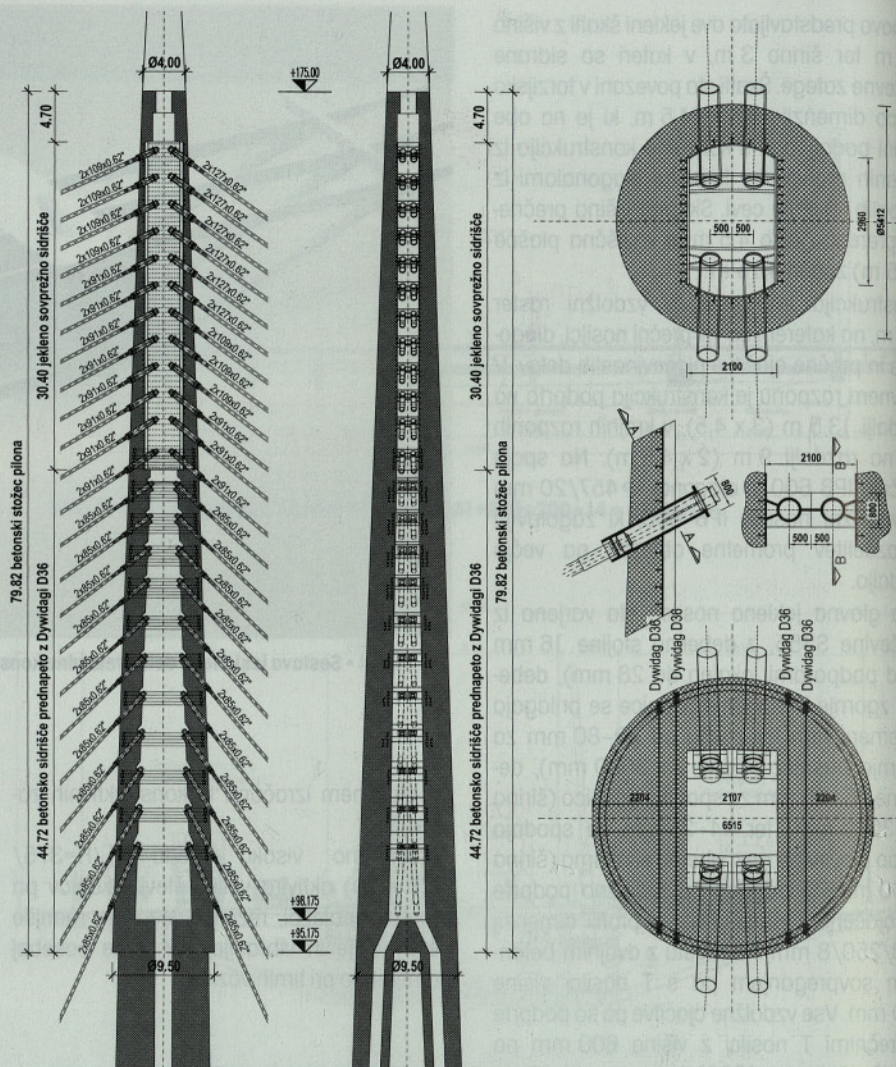


Slika 6 • Poševne zatege

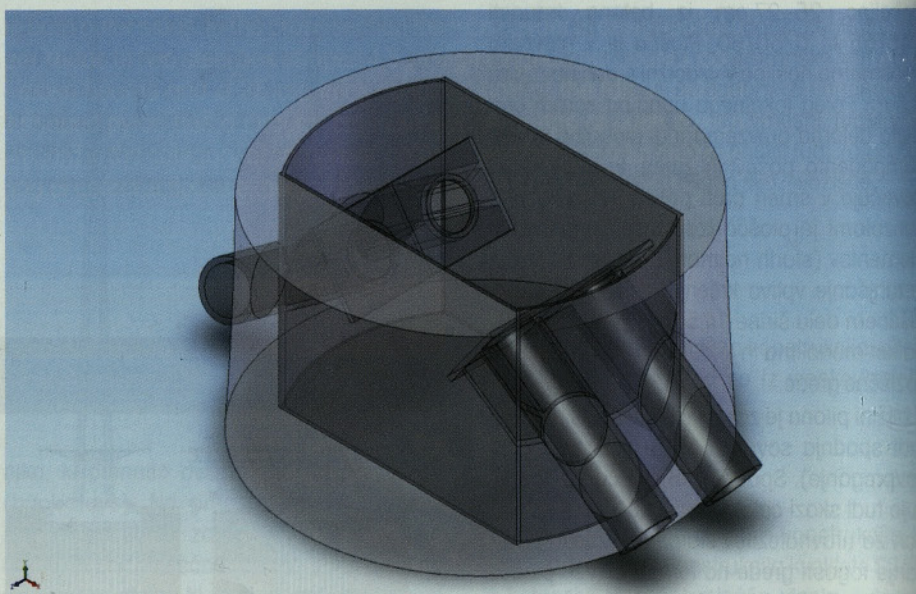
Poševne zatege

Poševne zatege so postavljene v obliki polpahljače ter podpirajo gredo prekladne konstrukcije v glavnem 375 m razponu na rastru 13,5 m, zadnji 200 m razpon pa v rastru 9,0 m. Skupaj je predvideno 23 parov kablov v vsakem od obeh razponov, torej skupno $2 \times 2 \times 23 = 92$ kablov v dolžini od 92 do maksimalno 368 m, v naklonih od 23,6° do 63,5°.

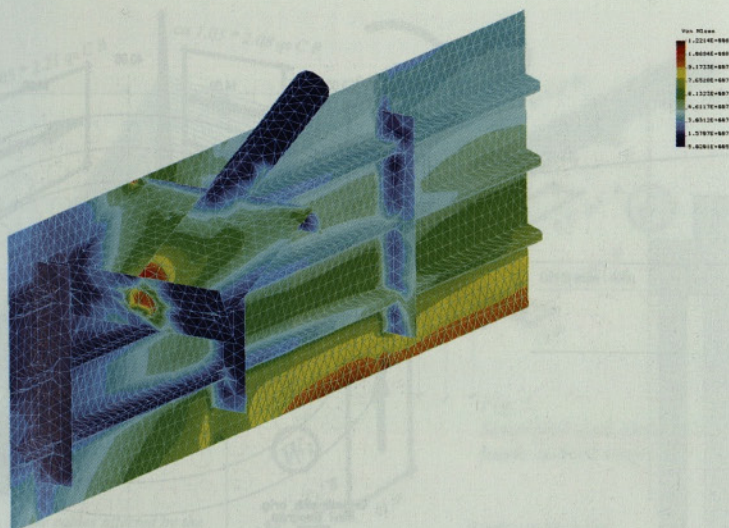
Poševne zatege so sestavljene iz kabelskih vrvi kvalitete 1770 MPa premera 15,7 mm



Slika 7 • Sidrišča v zgornjem delu pilona so sovprežna v spodnjem delu pa betonska



Slika 8 • Detajl sidrišča na pilonu



Slika 9 • Detajl sidrišča v jekleni gredi

($0,62'' = 150 \text{ mm}^2$). Posamezne zatege imajo po 85, 91 ali 109 vrvi. Za back-stay kable pa so bili predvideni kabli kar iz 127 vrvi. Nosilnosti kablov so pri izkoristku 45 % mejne nosilnosti od 10.155 kN ($85 \times 0,62''$) do 15.173 kN ($127 \times 0,62''$). Predlagana je trenutno največja možna zaščita, to je cinkana vrv, namaščena in zaščitena v PE ovoju minimalne debeline 1,5 mm (monostrand). Vse take posamične vrvi so še v skupni PE cevi z debelino stene 12–20 mm. To je tako imenovani prosti del kabla. Sestavni del poševne

zatege sta tudi obe sidrišči, spodaj priključek na gredo in zgoraj na pilon.

V pilonu so vsa sidrišča pasivna, v gredi pa aktivna, kar pomeni, da moramo potrebni prostor za napenjanje zagotoviti samo v gredi, kjer je dovolj prostora in lažji dostop. To je potrebno tudi zaradi posebne oblike pilona z majhno dimenzijo in ustrežno malo prostora na vrhu.

Posebej zanimivo je sidranje na vrhu pilona, kjer so kabli največji, prostora za sidranje pa najmanj. Tukaj so sidrišča predvidena kot

sovprežna, pri čemer jeklena konstrukcija sile prenaša strižno in natezno, prečno togost pa ji daje betonski krožni obod, ki je sovprežen z jeklenim delom (slika desno). Na ta način so prevzete vse sile ter omogočeni vsi potrebni dostopi za montažo in vzdrževanje kablov.

V spodnji polovici sidrišč na pilonu pa je mogoče prevzeti sile in zagotoviti dovolj prostora na betonskem obodu. Da preprečimo velike natezne napetosti in razpoke v betonu, so za prevzem nateznih sil iz kabla na kabel predvidene prednapete ravne palice (Dywidag). Število palic D36 mm se spreminja od 2×5 kosov do 2×12 kosov na vsaki strani sidrišča.

Spodnja sidrišča v jekleni gredi so namenjena napenjanju zateg. Posamična napenjalna glava se naslanja na jekleno cev premera od 550 do 610 mm, z dolžino 1700 do 3300 mm in debelino sten od 40 do 45 mm. Preko te se sila prenese na dve jekleni pločevini (strig) s čelnima prirobnicama (upogib) na obe stojini glavne vzdolžne jeklene škatle. Na vrhu škatle povečuje njeno togost še s trni sovprežena AB plošča.

Največje zatege se napenjajo v sidriščih na gredi na silo 15.000 kN.

Podporna konstrukcija in temeljenje

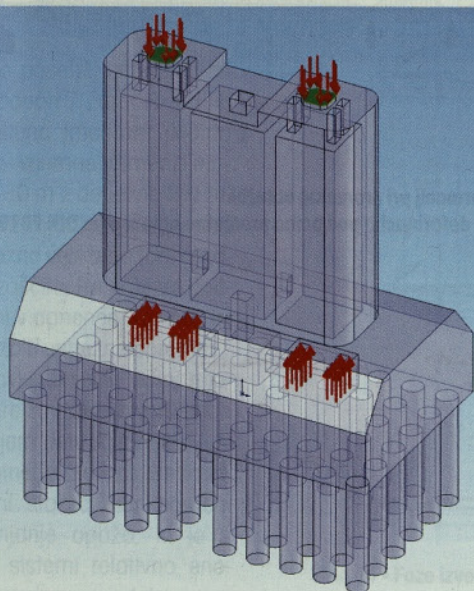
Na območju mostu je približno 20 m debel sloj peskov in gramozov na rahlo nagnjeni laporni podlagi. S Topčiderskega hriba pa se spušča do podpore v osi 7 celo skalnata apnenčasto podlaga. Globoko temeljenje je izvedeno s piloti premera 150 cm z dolžino od 21 do 32 m, razen na podpori 7, kjer so piloti dolgi 15 m.

Stebri podporne konstrukcije so enostavno in minimalistično oblikovani. Stebri so široki 16 m, debeli 3 m ter polkrožno zaključeni.

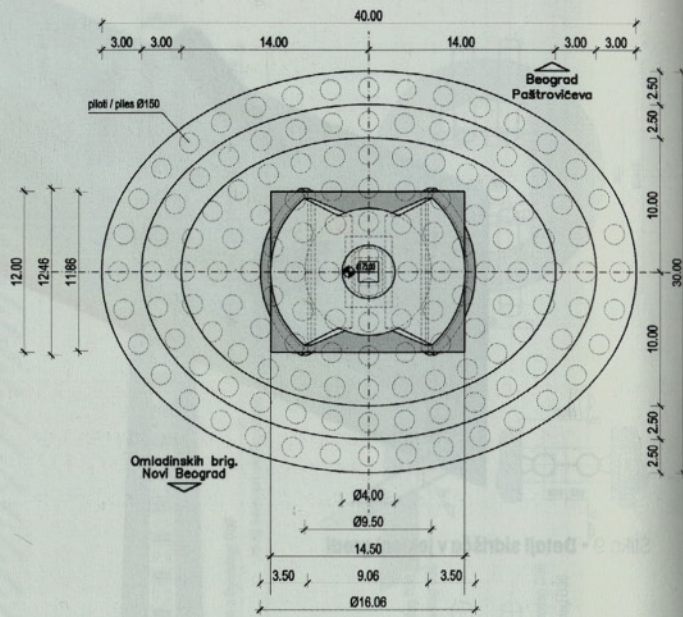
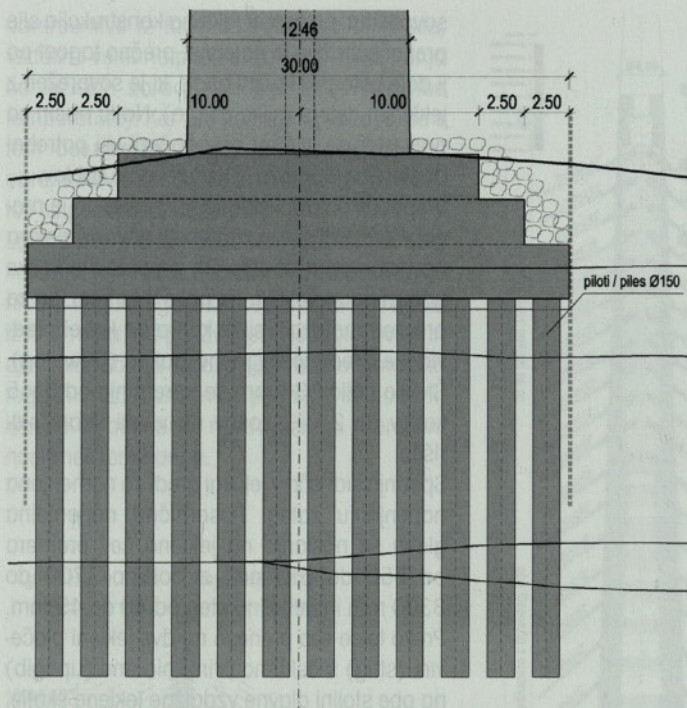
Izjema je steber v osi 7 na koncu razpona dolžine 200 m, ki prevzema natezne sile zaradi ekscentričnih razponov. Natezna sila se z 32 kabli $19 \times 0,62''$ prenaša na masivno podporo in pilote.

Za zagotovitev ustrezne varnosti proti dvigu konstrukcije so ležišča prednapeta s skupno $2 \times 16 \times 3375 = 108.000 \text{ kN}$. Opornik v osi 7 ima v pilotni blazini ustrezne komore za montažo in napenjanje kablov. Analiziran je bil na računskem modelu iz volumenskih končnih elementov.

Glavna podpora je kar spodnji del pilona, ki je tudi fiksna točka celotnega mosta. Temeljenje pilona je predvideno na 136 pilotih premera $\Phi 150 \text{ cm}$, ki so na vrhu povezani z ovalno pilotno blazino z dimenzijami $30 \times 40 \text{ m}$ ter največje debeline 8 m.



Slika 10 • Opornik v osi 7 in sile prednapenjanja



Slika 11 • Temelj pilona je velik 30 x 40 m in stoji na 136 pilotih premera 1,5 m

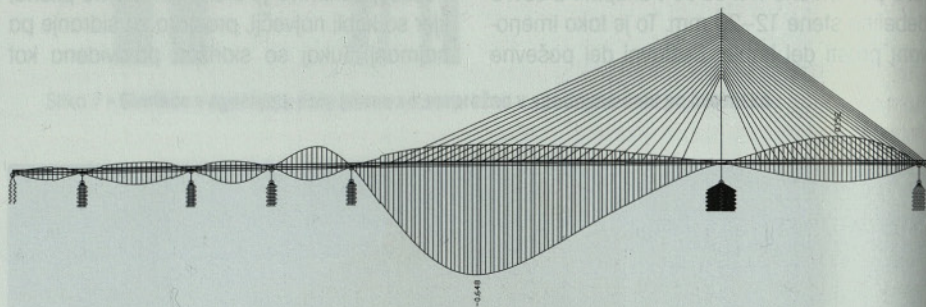
4 • STATIČNI IZRAČUN

Analiza konstrukcije je bila razdeljena v več sklopov:

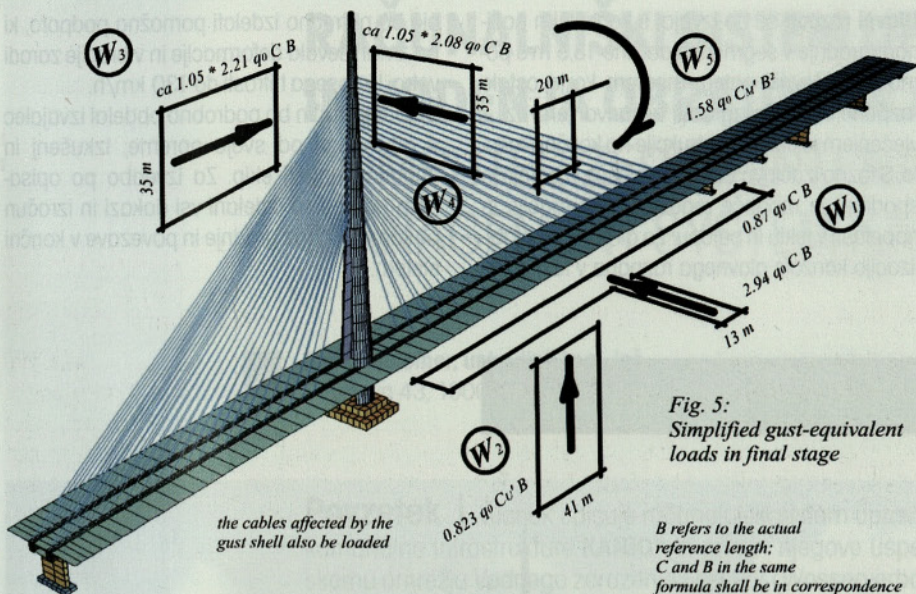
- glavna nosilna konstrukcija – faza gradnje
- glavna nosilna konstrukcija – faza uporabe
- glavna nosilna konstrukcija – račun prečne smeri
- podporna konstrukcija in temeljenje
- dinamični odziv pri vetru in potresu
- račun lokalnih elementov in detajlov

Uporabljeni so bili naslednji priznani računalniški programi:

- RM2004 (TDV) za analizo glavne konstrukcije – vzdolžna smer
- SOFISTIK za kontrolno analizo glavne nosilne konstrukcije in vplivov vetra
- SolidWorks in Cosmos za lokalne analize na 3D solid elementih
- Tower 5.4 za analizo prečne smeri
- 3D plaxis za geotehnične analize



Slika 12 • Ovojnica deformacij pri prometne obtežbi (maksimalna deformacija pod polno prometno obtežbo po DIN FB101 je 67 cm oz. L/562)



Slika 13 • Dinamični vplivi vetra v fazi uporabe

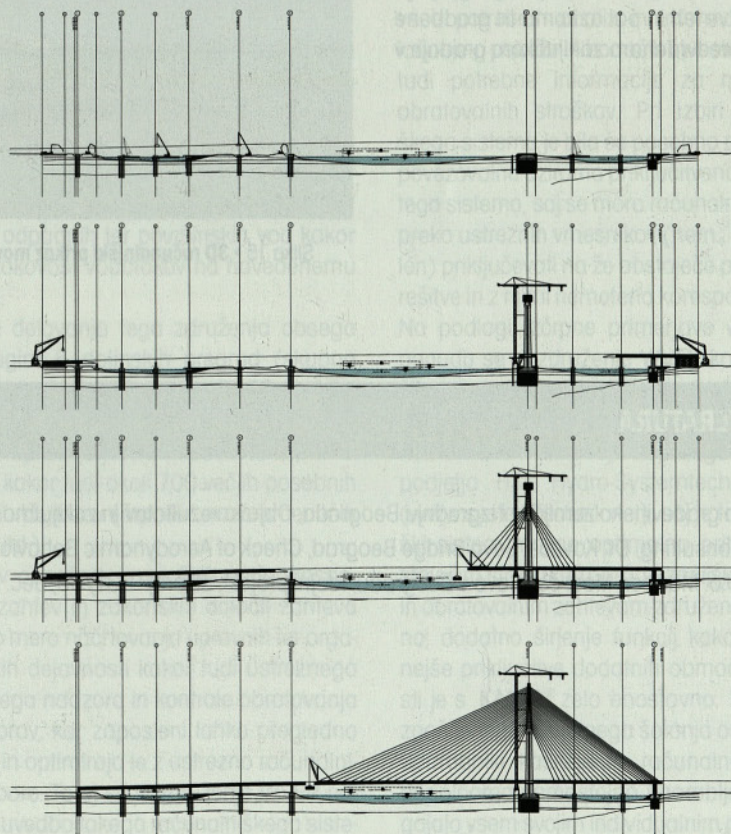
5 • TEHNOLOGIJA GRADNJE

Poleg običajnih gradbenih del in postopkov so pri gradnji posebej zahtevna ali zanimiva naslednja dela:

- globoko temeljenje
- izdelava 200 m visokega betonskega pilona
- izdelava 12.000 ton jeklene konstrukcije
- montaža in izvedba sovprežne voziščne konstrukcije
- izdelava in montaža 2200 ton poševnih zateg

Globoko temeljenje je posebej zanimivo pri pilonu in pri natezni podpori 7. Zaradi izrednih dimenzij mostu in pilona ima tudi pilotna blazina pod pilonom izjemne dimenzije – ovalni tloris oval 40 x 30 m z debelino 8,0 m. Za toliko bo tudi vrh 22 m dolgih pilotov pod vodnim nivojem. Ustrezno velika bo tudi gradbena jama ter njena zaščita. Pri natezni podpori 7 so piloti urezani v apnenec, kar bo potrebno upoštevati pri izbiri ustrezne opreme.

Gradnja pilona bo navkljub veliki višini relativno enostavna, saj gre za gradnjo vertikalne konstrukcije, v spodnjem delu razcepljene, v zgornjem delu pa enotnega prereza. Geometrija pilona je pravilni stožec, kar pomeni enakomerno spreminjanje opaža, ki je s poznanimi opažnimi sistemi relativno enostaven postopek (preverjeno z izdelavo načrta po sistemu Doka). Predviden je samo-



Slika 14 • Faze izvedbe: temeljenje, podorna konstrukcija, pylon, narivanje jeklene prekladne konstrukcije z obeh strani ter konzolna gradnja glavnega razpona s pomočjo poševnih kablov

premični opaž za segmentno višino 4 m. V zgornjem delu pa se višina prilagaja sidriščem kablov. Jekleni vrh pilona se lahko montira v enem kosu s pomočjo helikopterja.

Jeklena konstrukcija se lahko transportira po rečni poti, saj bo most zgrajen v neposredni bližini sotočja z Donavo. Tudi montaža grede je predvidena s plovil, saj je praktično ves most nad plovno vodo.

Glavni razpon se bo izvajal s konzolnim načinom gradnje v segmentih dolžine 13,5 m s pomočjo poševnih zateg, medtem ko je ostale razpone mogoče zgraditi z narivanjem oz. z vlečenjem jeklene konstrukcije na končno mesto. S fazno izdelavo betonske plošče (zgornje in spodnje) je mogoče regulirati deformacije in napetosti v jeklu in betonu. Za dinamično stabilizacijo konzole glavnega razpona v fazi grad-

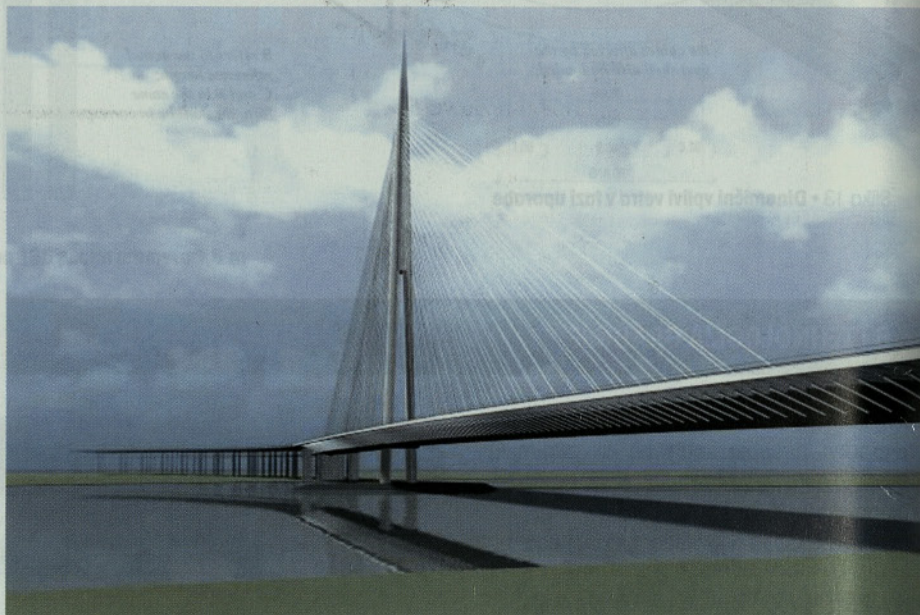
nje bo potrebno izdelati pomožno podporo, ki bo zmanjševala deformacije in vibracije zaradi vetra, ki dosega hitrosti do 130 km/h.

Dejanski način bo podrobno obdelal izvajalec v odvisnosti od svoje opreme, izkušenj in usposobljenosti ekip. Za izvedbo po opisanem načinu so izdelani vsi dokazi in izračun posameznih faz gradnje in povezave v končni sistem.

6 • INVESTICIJA IN TERMINSKI NAČRT

Po izdelanem projektantskem predračunu znaša investicijska vrednost mosta 90 milijonov evrov, to je dobrih 2000 evrov/m² površine mostu.

Trenutno je izbrano svetovalno podjetje (Inženir) Luis Berger Group, Inc., ki je začelo s pripravo izvajalskega razpisa. Osnova za razpis po sistemu »design-built« je v članku prikazani projekt. Terminski plan predvideva prvi razpis za sposobnost izvajalskih podjetij (short-cut list) v mesecu juniju 2007 ter nadaljevanje, tako da bo možen začetek gradnje v letu 2008. Predvideni čas gradnje mostu je dve leti in pol oziroma tri gradbene sezone s predvidenom zaključkom gradnje v letu 2010.



Slika 15 • 3D računalniški prikaz mostu

7 • LITERATURA

- Direkcija za građevinsko zemljište i izgradnju Beograda, Objava rezultatov in zaključno poročilo natečaja, www.beoland.com, Beograd, 2005.
 Dynamik Consulting, Dr. Kovacs, Sava Bridge Beograd, Check of Aerodynamic Behavior, Weistadt, 2005.
 Ponting d.o.o. Maribor, Most čez Savo v Beogradu, Idejni projekt, št. proj.: 331/05, dec. 2005.

RAČUNALNIŠKI SISTEM UPRAVLJANJA IN VODENJA OBRATOVANJA KANIO®

COMPUTERIZED MAINTENANCE MANAGEMENT SYSTEM KANIO®

Franc Maleiner, univ. dipl. kom. inž.,
Sojerjeva 43, 1000 Ljubljana

Strokovni članek
UDK (711.8 + 628.24) : 519.68

Povzetek | Članek opisuje računalniški sistem upravljanja in vodenja obratovanja komunalne infrastrukture **KANIO®** in primer njegove uspešne uporabe na kanalizacijskem omrežju Vodnega združenja Eifel-Rur (Wasserverband Eifel-Rur) v Nemčiji.

Summary | The paper describes the computer maintenance and management system **KANIO®** and an example of its successful implementation and use within the catchment area of the water association Wasserverband Eifel-Rur in Germany.

1 • UVOD

Kakor vsa druga podjetja morajo tudi gospodarske javne službe in javna komunalna podjetja nuditi strokovno vse zahtevnejše, obširne in visoko kvalitetne storitve po nizkih konkurenčnih cenah, da se lahko gospodarno uveljavljajo na vseh njihovih področjih dejavnosti. Pri nas se še premalo zavedamo, da hitro rastoče število različnih, obsežnih in med seboj prepletenih zakonodajnih ter tehničnih zahtev pogojuje uporabo računalniškega sistema vodenja ustanov in podjetij.

V preteklosti so, glede na njihove zmožnosti, posamezne nemške lokalne skupnosti ločeno ter vsaka zase reševale njihove vodno-gospodarske probleme. Zaradi pomanjkljivega strokovnega znanja ter izkušenj kakor tudi majhnega obsega dejavnosti (ter iz tega izvirajočega predragega strokovnega kadra) je bilo delovanje strokovnih služb skrajno neučinkovito in zato izjemno drago. Zatorej se je leta 1990 vlada dežele Nordrhein-Westfalen odločila, da za okoli 2.087 km² veliko porečje reke Rur ustanovi Vodno združenje (Wasserverband Eifel-Rur), ki mu je poverila izvrševanje vseh vodnogospodarskih nalog.

V to združenje (kratica: WVER) so včlanjene občine, deželna okrožja, vsi dobavitelji pitne vode in vse ustanove, ki proizvajajo odpadne vode na območju velikosti okoli 10 % Slo-

venije. Tako je trenutno v tem združenju zaposlenih okoli 524 oseb, ki ustvarijo letno okoli 250 milijonov € letnega finančnega prometa. Združenje je pristojno za zaščito pred visokimi vodami, za oskrbo s pitno ter porabno vodo, za zbiranje, odvajanje ter čiščenje odpadnih ter površinskih vod kakor tudi za kakovost vodotokov na navedenemu področju.

Področje delovanja tega združenja obsega med drugim 6 dolinskih pregrad (skupna prostornina okoli 300 milij. m³), 50 zadrževalnih bazenov visokih vod, 49 komunalnih čistilnih naprav (skupna kapaciteta 2,2 milijona PE) kakor tudi okoli 700 večjih posebnih gradbenih objektov (črpališč, razbremenilnih bazenov itd.).

Izpolnitev obsežnih, raznolikih vodnogospodarskih zahtev in zakonskih določil zahteva ogromno mero načrtovanja upravnih ter organizacijskih dejavnosti kakor tudi ustreznega strokovnega nadzora in kontrole obratovanja vseh naprav, kar zaposleni lahko pregledno izvedejo in optimirajo le z ustrežno računalniško podporo. Torej se je združenje WVER odločilo za uvedbo takega računalniškega sistema upravljanja in vodenja obratovanja, ki poleg kakovostnega načrtovanja, organizacije ter vodenja združenja vsebuje tudi optimiranje

stroškov nadzora in vzdrževanja naprav, obvladovanja (management) motenj obratovanj, poleg tega pa omogoča tudi pripravo vseh potrebnih analiz in informacij za odločanje o potrebnih bodočih investicijah kakor tudi potrebne informacije za minimiranje obratovalnih stroškov. Pri izbiri računalniškega sistema je bila še posebno pomembna povezovalna oziroma priključitvena zmožnost tega sistema, saj se mora računalniški sistem preko ustreznih vmesnikov (nem.: Schnittstellen) priključevati na že obstoječe programske rešitve in z njimi nemoteno korespondirati.

Na podlagi izčrpane primerjave vseh tržnih ponudb se je združenje WVER končno odločilo za uvedbo računalniškega sistema upravljanja in vodenja obratovanja **KANIO®**, trenutno na tem področju vodilnega nemškega podjetja HST Hydro-Systemtechnik GmbH (www.systemtechnik.net), saj je ta računalniški sistem možno optimalno prilagoditi obstoječim strukturam, organizacijskim oblikam in obratovalnim zahtevam združenja. Naknadno, dodatno širjenje funkcij kakor tudi kasnejše priključitve dodatnih območij dejavnosti je s **KANIO®** zelo enostavno. Na podlagi zgoščenega uvajalnega šolanja osebja lahko uporabniki kasneje ta računalniški sistem popolnoma samostojno uporabljajo in prilagajajo vsem svojim individualnim potrebam in zahtevam.

Računalniški sistem upravljanja in vodenja obratovanja zatorej ne omogoča samo ure-

jenost, preglednost ter učinkovitost upravljanja, obratovanja ter vzdrževanja celotnih naprav, temveč nudi uporabnikom tudi ustrezno pravno varnost. **Evropska zakonodaja** (Uradni list EU; L 143/56 z dne 30. 4. 2004; Smernice 2004/35/EG z dne 21. 4. 2004) **je namreč na področju zaščite okolja spreminila (obrnila) dokazni postopek.** Od tedaj dalje namreč v primeru ekološke nesreče

državnim organom ni več potrebno povzročiteljem škodljivih posledic za okolje dokazovati krivde, temveč mora, nasprotno, povzročitelj onesnaženja dokazati svojo nekrivdost v konkretnem primeru. To nekrivdo pa lahko pravno veljavno dokaže le na podlagi ustreznih pisnih dokazov (izpisov naročil, delovnih nalogov, terminskih poročil o izvedenih nadzorih ter

vzdrževalnih delih, spisov opozoril in dejanskih motenj obratovanja, evidentirani uporabi ustreznih potrebnih sredstev itd.). Ravno to pa računalniški sistem **KANIO®** avtomatično evidentira in dolgoročno shrani, v realnem času opozarja na obratovalne motnje in po potrebi opozori osebe, ter redno dokumentira in analizira postopke obratovanja.

2 • VODNO ZDRUŽENJE EIFEL – RUR (WVER)

Vodno združenje Eifel-Rur (WVER) je računalniški sistem upravljanja in vodenja obratovanja **KANIO®** uvedlo v začetku leta 2001 najprej le na področju vodnogospodarskih objektov mesta Aachna. Strežnik Kanio je bil skupno s podatkovno zbirko ORACLE nameščen na glavno komunalno čistilno napravo Aachen-Soers. Na petih (med seboj ločenih) delovnih mestih ter preko številnih dlančnikov se je uporabnikom računalniškega sistema ponudila možnost:

- neposrednega upravljanja s čistilno napravo ter nanjo priključenih posebnih objektov,
- možnost načrtovanja ter določanja časovnih intervalov nadzora ter vzdrževanja naprav,
- določanja ter časovnega načrtovanja delovanja osebja ter smiselne uporabe vseh potrebnih obratovalnih sredstev kakor tudi
- evidentiranja ter dokumentiranja vseh dejavnosti.

Do uvedbe sistema **KANIO®** so bile v vseh redno kontroliranih objektih nameščene ustrezne dokumentacijske mape, v katere so se vsakokrat ročno vnašali podatki o opravljenih storitvah, posegih ter pregledih. Ta poročila so se mesečno zbirala ter vrednotila. Za okoli 85 naprav je bilo tako potrebno mesečno ročno obdelati, ovrednotiti in arhivirati okoli 500 do 600 skupin zapisanih podatkov. Za zahtevana mesečna in letna poročila nadrejenim uradom ali za poročila ob izrednih dogodkih (npr.: poplavl) itd. je bilo zelo pogosto treba ročno iskati, sestavljati, primerjati ter analizirati ustrezno arhivirane podatke, kar je zahtevalo veliko število zaposlenih ter veliko (dragega) dela ter časa.

Z uvedbo sistema **KANIO®** je postala dokumentacija na kraju samem nepotrebna, saj preko dlančnikov zaposleno osebje komunicira ter prejema vse delovne naloge in potrebne podatke, prav tako tudi potrjuje izvedbo zahtevanih dejavnosti ter nove ali spre-

njene podatke pošilja neposredno na predvidene računalniške naslove. Po potrebi se iz mesta nadzora na terenu z enostavnim pritiskom na ustrezní gumb dlančnika lahko preko računalnika poišče in po elektronski poti preskrbi tudi ustrezne informacije ali razpošlje potrebne načrte, podatke, poročila ali analize.

Sistem **KANIO®** lahko deluje na PC operacijskih sistemih Windows NT, Windows 2000 in Windows XP. Poleg 512 MB RAM se zahteva 4 GB prostega spomina na disku ter hitrost procesorja višja kakor 1 GHz. Če sistem obratuje kot posamezni uporabnik, zadostuje 256 MB RAM, 0,5 MB spomina ter hitrost procesorja nad 700 MHz.

Na podlagi pozitivnih izkušenj ter predvsem na podlagi prihranjenih obratovalnih stroškov so se že v naslednjih letih na računalniški strežnik v Aachen-Soersu preko ISDN postopoma priklopila še vsa nadaljnja področja dejavnosti. Trenutno združenje WVER s pomočjo sistema **KANIO®** upravlja, nadzoruje ter vzdržuje okoli 350 kompletnih naprav. Tudi število dlančnikov za podporo osebja na terenu se je med tem zvišalo na več kot 25.

3 • RAČUNALNIŠKI SISTEM UPRAVLJANJA IN VODENJA OBRATOVANJA KANIO®

Računalniški sistem upravljanja in vodenja obratovanja **KANIO®** je razdeljen na 4 glavna modularna področja, ki imajo še nadaljnjo notranjo delitev.

3.1 Modularno področje za upravljanje (konfiguracijo) s podatki

Modularno področje za upravljanje s podatki vsebuje module za delo z naslednimi skupinami podatkov:

- osnovni podatki (Stammdaten)
- obratovalna sredstva (Betriebsmittel)
- dejavnosti (Tätigkeiten)

- stroškovna mesta (Kostenstellen)
- upravljanje skladišč (Lagerverwaltung)
- naslovi (Adressverwaltung)

V modularnem področju **konfiguracija** (Konfiguration) se odlagajo torej vsi za načrtovanje obratovanja potrebni podatki o zaposlenem osebju, voznem parku, sredstvih porabe, napravah, objektih itd. kakor tudi vrste dejavnosti, naslovi ter podatki o stroškovnih mestih. Poleg tega se definirajo potrebna obratovalna / nadzorstvena dela, vključno z določljivijo ustreznih intervalov nadzora in fiksnih terminov.

Preko modularnega področja konfiguracija se lahko določi stopnja uporabe posameznih vozil ali strojev na določeno časovno dobo. Stroškovna mesta, na katerih se knjižijo stalni ter tekoči obratovalni stroški, omogočajo predhodno ali naknadno kalkulacijo dejavnosti (osebja, voznega parka, opreme itd.) in s tem analizo ter optimiranje obratovalnih postopkov ter stroškov.

Na podlagi teh podatkov sistem **KANIO®** v modularnem področju za vodenje obrata popolnoma avtomatično izdeluje in predlaga terminske predloge, ki jih smiselno združuje in ustrezno načrtuje v okviru obhodnih terenskih dejavnosti (nem.: Tourenplanung). Pri tem se upoštevajo kvalifikacija in razpoložljivost osebja, obdobja dopustov ter bolezenskih

odsotnosti, razpoložljivost vozil ter opreme, ugotavljajo potrebna sredstva itd.

3.2 Modularno področje za vodenje obrata in obvladovanje motenj

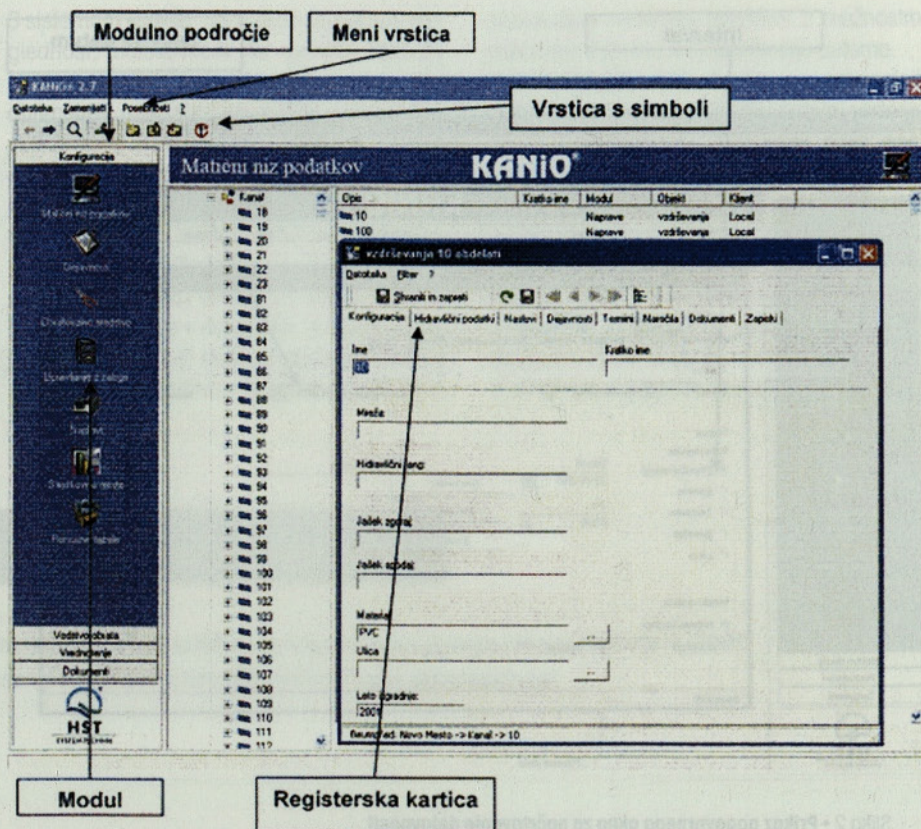
Modularno področje za vodenje obrata vsebuje naslednje module:

- časovno načrtovanje (Terminplanung)
- ravnanje z delovnimi nalogi (Auftragsverwaltung)
- GIS – povezave (GIS-Anbindung)
- načrtovanje delovnih obhodov (Tourenverwaltung)
- obvladovanje (management) obratovalnih motenj (Störfallmanagement)

V okviru modularnega področja konfiguracija se določijo obsegi potrebnih vzdrževalnih del in zahtevani časovni ali količinski intervali. Ti podatki se preko vmesnika vnesejo v modularno področje za **vodenje obrata in obvladovanje motenj** (Betriebsführung mit Störfallmanagement). To modularno področje prevzame kompletno organizacijo, prikaz ter izdajo delovnih nalogov. Avtomatično načrtuje ter izdela ekonomsko optimalne terminske predloge aktivnosti in jih po potrditvi nadalje obdela in v obliki ustreznih delovnih nalogov ustrezno razpošlje na določene naslove.

Modularno področje za vodenje obrata in obvladovanje motenj pomeni znatno zmanjšanje obsega del, saj prevzame terminsko pripravo del, izdelavo delovnih nalogov ter načrtovanje delovnih obhodov. Posamezni termini se združujejo v delovne naloge tako, da so optimalno zaposleni ter ekonomsko uporabljeni tako osebje kakor tudi vsa delovna sredstva. Delovni nalogi se sporočajo (na primer osebju posameznih čistilnih naprav) neposredno na njihove računalnike (lahko tudi na dlančnike). Na zaslonu se pokažejo potrebne informacije, delovni nalogi ter predvidene zahteve, ki naj se izvedejo v navedenem zaporedju. Izvršitev del oziroma ustrezni podatki morajo biti preko računalnika (ali dlančnika) povratno potrjeni in evidentirani neposredno v računalniškem sistemu. S tem odpadejo izpisi delovnih nalogov ter kasnejši ročni vnosi podatkov, kar zmanjša tudi možnosti napačnega prenosa podatkov. Sistem avtomatično opozarja na nepotrjena ali pomanjkljivo izvedena dela.

Nadalje nudi sistem **KANIO®** možnost izdelave in aktualizacije nadzornih ter vzdrževalnih načrtov (npr.: načrti izpiranja ter čiščenja kanalov) s pomočjo grafične povezave (npr.: ArcGis, ArcView). V grafikah se z določeno barvo vizualizirajo že izvedena in dokumentirana dela tako, da zaposleno



Slika 1 • Prikaz pogovornega okna

osebje na prvi pogled razpozna že obdelana področja oziroma naloge, ki jih je potrebno še izvesti.

Vsi že izdelani delovni nalogi se shranijo v računalniku. Na podlagi podanih izvedbenih intervalov se ti delovni nalogi (v izbranih časovnih intervalih) avtomatično regenerirajo in pojavljajo na ekranu računalnika, ne da bi jih bilo treba ponovno izdelati ali vnesti v računalnik.

Sistem **KANIO®** lahko tudi dodatno obdeluje že izvedene delovne naloge, saj so na razpolago vmesniki (Schnittstellen) za črpanje ter prenos vseh potrebnih podatkov v obratovalno-gospodarsvene programske sisteme (npr.: SAP). Poleg tega se lahko vnašajo neposredno v modularno področje za vrednotenje tudi trgovske analize ter natančna ovrednotenja posameznih stroškovnih mest.

3.3 Modularno področje za vrednotenje

Modularno področje za vrednotenje vsebuje naslednje module:

- urejevalnik besedil (Berichtseditor)
- izdelava poročil (Berichtserstellung)
- Exel – izhodni zapis (Excel-Export)

Vrednotenje (Auswertung) relevantnih obratovalnih podatkov poteka v obliki Excel poročil, ki črpajo oziroma uporabljajo ustrezne podatke neposredno iz podatkovne zbirke ORACLE. Obliko ter vsebino teh poročil lahko uporabnik poljubno spreminja ali prireja svojim individualnim zahtevam. Pri tem se lahko zahtevani podatki nanašajo na posamezne dele ali na celotno napravo. Lastoročne pisne pripombe niso potrebne.

V primeru nastale ekološke škode je (na podlagi z evropskim predpisom obrnjenega dokaznega postopka) upravljalec vodnogospodarskega podjetja dolžan predložiti popolni dokaz o pravilnem obratovanju ter o redno izvedenih konkretnih nadzornih in vzdrževalnih ukrepih na določeni napravi. Ker se s pomočjo sistema **KANIO®** neprekinjeno evidentirajo in dokumentirajo obratovalne motnje in vsa realizirana nadzorna ter vzdrževalna dela, se lahko le-ta kasneje v celoti ter brez težav predložijo v pisni obliki. V sistemu **KANIO®** so na razpolago tudi osnutki obrazcev za izdelavo pravno ustrezno zasnovanih nadzornih poročil, ki so usklajeni z evropskimi zakonskimi zahtevami.



Slika 2 • Prikaz pogovornega okna za načrtovanje dejavnosti

4 • UPORABNE MOŽNOSTI ZA SISTEM KANIO®

Uporaba sistema **KANIO®** ni omejena samo na omenjeni področji preskrbe in odskrbe z vodo. V nemško govorečih deželah Avstrije, Nemčije ter Švice se sistem **KANIO®** uspešno uveljavlja tudi na področjih gospodarjenja z odpadki, avtocest in mostov, preskrbe s plinom, preskrbe z električnim tokom, na področju telekomunikacij, na področju preskrbe s toplo vodo itd. Sistem **KANIO®** lahko ponudi

tudi prirejena uporabna strokovna okolja (Fachschalen) za posamezna strokovna področja (kanalizacija, vodovod, električni tok, plin itd.).

Poleg javnih organov upravljanja (npr.: uprave celotnega švicarskega kantona Basel, mestne uprave Wuppertala in Innsbrucka, Združenja Eifel-Rur, občinskih uprav itd.), se v vse večji meri s sistemom **KANIO®** opremljajo tudi

5 • SKLEP

Evropska zakonodaja je na področju zaščite okolja spremenila (obrnila) dokazni postopek. Državnim organom tako ni več potrebno dokazovati krivde povzročiteljem škodljivih posledic za naše okolje, temveč mora, nasprotno, povzročitelj dokazovati svojo nekrivdo v konkretnem primeru. Pravno varno naknadno dokazovanje osumljenega

povzročitelja je izvedljivo le na podlagi ustreznih pisnih dokazov (natisnjenih naročil, delovnih nalogov, terminskih poročil o pravočasno izvedenih nadzorih ter vzdrževalnih delih, arhiviranih spiskov opozoril in dejanskih motenj obratovanja, evidentirani uporabi ustreznih potrebnih sredstev itd.), ki jih je računalniški sistem

3.4 Modul za multimedijško rabo dokumentov

V **dokumentih** (Dokumentation) se poleg ustrezne projektne dokumentacije shranjujejo tudi tekstualni, slikovni, video in zvočni dokumenti o terenskih okoliščinah, o dejanskem stanju naprav ter o različnih potekih obratovanja. Shranjena pa so tudi navodila o uporabi, zakonske določbe, uredbe, mnenja, izračuni, dopisi, soglasja itd. Tako je možen hitri in neposredni vpogled v vso zbrano obstoječo dokumentacijo celotnih naprav.

S pomočjo uporabe analitskih filtrov se lahko podajo in analizirajo posamezni parametri (npr.: časovna uporaba določenega vozila) ali dejavnosti (npr.: dejanski stroški določene delovne skupine) v izbranih časovnih obdobjih oziroma na obračunsko enoto. S takimi analizami se ugotavljajo »ozka grla« v obratovalnih procesih kakor tudi stroškovno »preobremenjene« dejavnosti.

zasebne gospodarske družbe (npr.: Steierische Gasversorgung, itd.), saj se stroški za uporabo ter instalacijo programa **KANIO®** povrnejo že v zelo kratkem času zaradi izredno učinkovitega vodenja obratovanja, obširnih možnosti optimiranja obratovanja ter ne nazadnje na podlagi stalno hitreje naraščajočih zahtev zakonodaje. Podatkovna zbirka ORACLE omogoča enostavno ter hitro korespondenco sistema **KANIO®** z obstoječimi programi (npr.: sistema GIS in SAP).

KANIO® avtomatično evidentiral in shranil med obratovanjem naprav.

Računalniški sistem upravljanja in vodenja obratovanja **KANIO®** nemškega podjetja HST Systemtechnik GmbH omogoča hitro, pregledno ter izčrpno informiranje o dejanskem stanju celotnih naprav, omogoča analizo in optimiranje dogajanj med obratovanjem in vodi stroškovna mesta. Vsi podatki se po elektronski poti avtomatično evidentirajo, dokumentirajo ter arhivirajo. Vrednotenje opravljenih aktivnosti podaja

tudi bistvene informacije o pravilnem vodenju osebja ter optimiranju stroškov, podpira analizo in iskanje tehnološko slabotnih mest obratovanja ter odpravo stroškovno intenzivnih mest nadzora in vzdrževanja.

Praviloma so se posamezni uporabniki odločili najprej za nabavo minimalnega paketa za manjše, omejeno področje njihove dejavnosti. Na podlagi kratkoročnega testiranja in dobrih delovnih izkušenj pa se običajno relativno zelo hitro odločijo ta sistem razširiti tudi na preostala področja.

S sistemom **KANIO®** se ustvari urejenost, preglednost, učinkovitost ter pravna varnost poslovanja. Računalniški sistem omogoča optimalno, pregledno in varčno upravljanje, vzdrževanje in vodenje poslovanja ter obvladovanje motenj obratovanja.

Delo z računalniškim sistemom je hitro in enostavno, saj se za dostop uporabljajo ustrezna pogovorna okna. Praktične izkušnje kažejo, da so se investitorjem stroški za nakup sistema **KANIO®** povrnili že v nekaj letih. Ustrezno začetno šolanje osebja (v sklopu instalacije sistema) omogoča uporabnikom prijazno, popolnoma

samostojno nadaljnjo uporabo, z možnostmi naknadne individualne modifikacije sistema.

Tudi pri manjših občinah oziroma komunalnih podjetjih lahko računalniški sistem vodenja ublaži pomanjkanje ustreznega (dragega) kadra, saj izpolnitev obsežnih, raznolikih vodno-gospodarskih zahtev in drugih zakonskih določil ne zahteva samo vedno večje in dražje načrtovanje upravnih ter organizacijskih dejavnosti, temveč tudi ustrezni strokovni nadzor in kontrolo obratovanja vseh naprav, ki jih zaposleni lahko ceneno, optimalno in varčno izvedejo le z ustrežno računalniško podporo.

6 • LITERATURA

Berkenkopf, M., Eckart, M., Betriebsführungssystem KANIO: mehr Qualität zu geringen Kosten, Energie/Wasser-Praxis, 11/2005.

»Sicheres, effizientes und lückenloses Berichtswesen durch Betriebsführungssystem« www.watervision.net

O MULTIPLIKATIVNI TEORII HIPERELASTO-PLASTIČNIH TELES PRI VELIKIH DEFORMACIJAH IN OBJEKTIVNOSTI NUMERIČNIH ALGORITMOV.

II. DEL: INTEGRACIJSKI ALGORITMI

ON MULTIPLICATIVE THEORY OF
HYPERELASTO-PLASTIC BODIES
AT LARGE STRAINS AND OBJECTIVITY
OF NUMERICAL ALGORITHMS.

PART II: INTEGRATION ALGORITHMS

dr. Tomaž Rojc, univ. dipl. inž. grad.

tomaz.rojc@guest.arnes.si

Prijateljeva ulica 32

1000 Ljubljana

Znanstveni članek

UDK 624.044 + 539.3 + 519.61

Povzetek | V tem delu članka je obravnavana problematika fizikalno neutemeljene zmanjševanja volumna končnih elementov pri reševanju elasto-plastičnih problemov v področju velikih deformacij. Na ta problem so naleteli nekateri raziskovalci, ki so se ukvarjali z nizkocikličnim obremenjevanjem elasto-plastičnih teles. Ugotovili so, da se pri cikličnem obremenjevanju modelov iz končnih elementov v območju velikih plastičnih deformacij volumen končnih elementov stalno plastično zmanjšuje. Pri tem so uporabljali algoritem, ki je temeljil na multiplikativni hiperelasto-plastični teoriji. Prispevek pojasnjuje ozadje tega računskega fenomena v okviru od hidrostatične napetosti neodvisnega pogoja tečenja (von Misesova funkcija tečenja). Pri tem se opira na nekatere teoretične izsledke iz prvega dela. Na kratko je opisana zasnova dveh numeričnih algoritmov, povzetih po literaturi, pri čemer sta oba raziskana glede na izpolnjevanje pogoja o nični plastični volumenski deformaciji. Oba algoritma sta bila preko uporabniškega programa UMAT vstavljeni v komercialni programski sistem ABAQUS/Standard in na preprostem reprezentativnem primeru preizkušena glede na izpolnjevanje omenjenega pogoja. V raziskavo sta vključena še dva dodatna algoritma, od katerih je eden izpeljan na neustrezno diskretiziranih enačbah, objavljenih v literaturi. Rezultati izračunov preizkusa teh algoritmov so v prispevku prikazani v diagramih, analitično analizirani in na kratko razloženi. Samo na enem algoritmu je bil pri tem ugotovljen opisan računski fenomen. Pojasnjeni so dejavniki tega fenomena.

Summary | This part of the paper is concerned with the unexpected volume degradation of finite elements that occurs during the numerical solution of elasto-plastic problems at large strains. The phenomenon has been encountered by some researchers within the solution of finite element models exposed to periodical loading and solved by computational algorithm, based on the multiplicative elasto-plastic theory. They estab-

lished that, at the periodical loading within the regime of the large plastic strains, the volume of the finite elements is reducing permanently. In the paper, a background of the mentioned numerical phenomenon is discussed in the context of pressure insensitive plasticity (the von Mises yield plasticity model). Some findings, reported in the first part of the paper, are used in the discussion. The discretization of constitutive equations, presented there, and the design of two algorithms for their integration, published also in literature, are briefly explained and inspected with respect to fulfilment of the zero plastic volume change condition. Both of them are implemented in the commercial finite element code ABAQUS/Standard by means of the user subroutine UMAT and tested on simple representative examples with regard to fulfilment of the mentioned condition. In the research, additional two algorithms are included as well, one of them being formulated on the deficient set of discretized equations, published in literature. The results of the tests are presented in diagrams, analytically analysed and also briefly discussed. The phenomenon, i.e. the plastic volume degradation of finite elements, is found only at one algorithm. Influential factors for this phenomenon are explained.

1 • UVOD

V literaturi, ki obravnava numerično reševanje problemov na področju mehanskega obnašanja kovinskih materialov v območju velikih deformacij, se avtorji običajno ne ukvarjajo posebej s preverjanjem algoritmov z vidika njihove objektivnosti pri izpolnjevanju pogoja nične plastične volumenske deformacije. Po eni strani tudi ni razloga za to, saj naj bi bile volumenske spremembe zaradi majhnih elastičnih deformacij in omejevanja volumenske plastične deformacije s pravilom tečenja po naravi majhnega velikostnega reda in iz tega vidika nepomemben dejavnik odziva numeričnih modelov. Zato je bila toliko bolj presenetljiva vest, ki je bila sporočena v diskusiji na Seminarju mehanike na FMF dne 25. marca 2004 (moderator dr. Mejak George), da mnogi numerični algoritmi ne izpolnjujejo omenjenih pričakovanj in da se pri cikličnem obremenjevanju računskih modelov volumen končnih elementov stalno plastično zmanjšuje, kar privede v nepričakovano prekinitvev numeričnega postopka.

Omenjeni računski fenomen je bil zapažen pri numeričnem reševanju problemskih enačb, zasnovanih na lokalni elasto-plastični teoriji kontinuuma s von Misesovo funkcijo tečenja, katere izhodišče sta hiperelastična definicija napetosti in multiplikativna razdelitev deformacijskega gradienta na elastični in plastični del, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p$. Pri tem je zanimivo dejstvo, da o njem nismo do takrat zasledili nobenega poročila v nam poznani literaturi, čeprav naj bi bil opisan fenomen pomanjkljivost mnogih algoritmov.

Ker je bila tema o tem fenomenu leto kasneje še vedno aktualna, sem se ob njegovem koncu odločil (tj. v letu 2005) opraviti preizkus in podrobnejšo preiskavo nekaj algoritmov, ki temeljijo na t. i. multiplikativni teoriji. Preizkus algoritma, objavljenega v (Rojc, 1993), ki je zasnovan na aditivni elasto-plastični teoriji, je namreč pokazal, da ni občutljiv za omenjeni fenomen in da pravilno obravnava volumenske spremembe končnih elementov tudi pri ciklični obremenitvi. Iz tega sledi sklep, da so nanj občutljivi predvsem algoritmi, zasnovani na multiplikativni elasto-plastični teoriji, ki je bila podrobneje obravnavana v prvem delu prispevka (Rojc, 2007).

V tem delu so predstavljeni rezultati omenjene preiskave v štirih dodatnih razdelkih. V drugem so podane konstitutivne enačbe plastično nestisljivega hiperelasto-plastičnega materialnega modela, ki so povzete po prvem delu prispevka. V 3. razdelku je obravnavano numerično reševanje omenjenih enačb. V posameznih podrazdelkih je v njem podana zasnova integracijskih algoritmov, ki so objavljeni tudi v originalnih delih Sima (Simo, 1988), (Simo, 1992a) in (Simo, 1992b). V 4. razdelku je izvršen računski preizkus predstavljenih algoritmov, algoritma, ki ga uporablja programski sistem ABAQUS/Standard, (ABAQUS, 2004), in algoritma, izpeljanega na neustrezno diskretiziranih konstitutivnih enačbah. Preizkus naštetih algoritmov je izvršen iz vidika izpolnjevanja von Misesovega pogoja tečenja o nični plastični volumenski deformaciji. Bistvene ugotovitve raziskave so zbrane v sklepnem 5. razdelku.

2 • POVZETEK 1. DELA: MULTIPLIKATIVNA TEORIJA

Temeljno izhodišče teorije je multiplikativna dekompozicija totalnega deformacijskega gradienta \mathbf{F} na elastični in plastični del, \mathbf{F}_e in \mathbf{F}_p

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p, \quad J = J_e J_p, \quad (1a,b)$$

pri čemer velja

$$J = \det[\mathbf{F}] > 0, \quad J_e = \det[\mathbf{F}_e] > 0, \quad J_p = \det[\mathbf{F}_p] > 0. \quad (1c,d,e)$$

Na tej osnovi so bile izpeljane konstitutivne enačbe, ki definirajo elastični odziv in evolucijo plastičnih deformacij v delcih elasto-plastičnega telesa takole:

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \partial_{\mathbf{b}_e} \Psi(\mathbf{b}_e) \cdot \mathbf{b}_e, \quad (2a)$$

$$\text{pravilo tečenja} \quad - \mathcal{L} \mathbf{b}_e = \dot{\gamma} 2 \partial_{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{\tau}, q) \cdot \mathbf{b}_e, \quad (2b)$$

lokalni pogoji obremenjevanja in razbremenjevanja:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\tau}, q) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\tau}, q) = 0. \quad (2c,d,e)$$

Zgoraj je $\boldsymbol{\tau}$ Kirchhoffov napetostni tenzor, ki je s Cauchyjevim povezan z $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$, Ψ in f sta skalarni potencialni funkciji podanih argumentov, \mathbf{b}_e oziroma $\boldsymbol{\tau}$ in q , $\dot{\gamma}$ je plastični multiplikator in q je ustrezna karakteristika izotropnega plastičnega utrjevanja. Veličina $\mathcal{L} \mathbf{b}_e$ predstavlja t. i. Liejev odvod elastičnega Fingerjevega oziroma levega deformacijskega tenzorja \mathbf{b}_e . Ta tenzorja sta definirana z:

$$\mathcal{L} \mathbf{b}_e = \mathbf{F} \cdot \partial_t (\mathbf{C}_p^{-1}) \cdot \mathbf{F}^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{b}_e = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (4)$$

kjer $\partial_t(\bullet)$ označuje parcialni odvod izraza v oklepaju (\bullet) po času t , \mathbf{C}_p pa je desni plastični deformacijski tenzor, katerega definicija

$$\mathbf{C}_p \equiv \mathbf{C}(\mathbf{F}_p) = \mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{F}_p, \quad (5)$$

je ekvivalentna definiciji desnega Cauchy-Greenovega deformacijskega tenzorja \mathbf{C}

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{F}. \quad (6)$$

Oba tenzorja \mathbf{C}_p in \mathbf{C} sta predstavljena kot materialni polji nad območjem začetne oziroma nedeformirane konfiguracije telesa \mathcal{H}_0 , medtem ko tenzor \mathbf{b}_e , podobno kot $\boldsymbol{\tau}$ in $\boldsymbol{\sigma}$, predstavljajo t. i. prostorska polja, definirana nad območjem trenutne deformirane konfiguracije \mathcal{H}_t . Glede na omenjene definicije predstavljajo enačbe (2) prostorski opis konstitutivnih enačb. Enačba (4) je bila v (Rojc, 2007) obravnavana kot vrnitev materialnega polja \mathbf{C}_p^{-1} v prostorsko polje \mathbf{b}_e , enačba (6) pa kot vzvrat prostorskega metričnega tenzorja $\mathbf{1}$ (kartezična tenzorska enota) v materialno polje \mathbf{C} . Ta terminologija bo mestoma uporabljena tudi v nadaljevanju.

Namesto t. i. funkcije proste energije Ψ je bil v prejšnjem prispevku uporabljen tudi izraz elastična deformacijska energija oziroma hiperelastična energijska funkcija, za katero je bila vpeljana nova oznaka W . V nadaljevanju bosta uporabljeni dve obliki te funkcije, in sicer razdvojena, \underline{W} , in nerazdvojena energijska funkcija W , ki se razlikujeta po svoji sestavi glede volumenske in deviatorske oz. preoblikovalne energije. Značilnost razdvojene funkcije je njena aditivna razdelitev na volumenski in preoblikovalni del

$$\underline{W} \equiv \underline{W}(\mathbf{b}_e) = U(J_e) + \frac{1}{2} \mu (\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}_e] - 3), \quad (7)$$

kjer je

$$J_e = \det[\mathbf{F}_e] = (\det[\mathbf{b}_e])^{1/2}, \quad (8)$$

in

$$\bar{\mathbf{b}}_e = J_e^{-2/3} \mathbf{b}_e, \quad \det[\bar{\mathbf{b}}_e] = J_e^{-2} \det[\mathbf{b}_e] = J_e^{-2} J_e^2 = 1, \quad (9a,b)$$

je t. i. volumensko nevtralizirana spremenljivka, katere determinanta je časovna konstanta in enaka 1. Zgoraj je μ konstanta, ki jo lahko tolmačimo kot strižni modul. V volumenskem delu funkcije, tj. $U(J_e)$, je skrita druga konstanta, ki jo v pričujočem primeru lahko obravnavamo kot kompresijski modul κ . Ob upoštevanju $\underline{W}(\mathbf{b}_e)$ v (2a), dobimo za Kirchhoffov napetostni tenzor $\boldsymbol{\tau}$ izraz

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \partial_{\mathbf{b}_e} \underline{W} \cdot \mathbf{b}_e = J_e U'(J_e) \mathbf{1} + \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}_e], \quad (10a)$$

v katerem sta volumenska (ali sferična ali izotropna) in deviatorska (ali brezsledna) komponenta, τ_o oziroma $\text{dev}(\boldsymbol{\tau})$, funkciji samo ene spremenljivke, tj. prva je funkcija J_e , druga pa funkcija volumensko nevtralizirane spremenljivke $\bar{\mathbf{b}}_e$:

$$\tau_o = J p = \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}] = J_e U'(J_e), \quad (10b)$$

$$\text{dev}[\boldsymbol{\tau}] = \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}_e] = J_e^{-2/3} \mu \text{dev}[\mathbf{b}_e]. \quad (10c)$$

Za nerazdvojeno energijsko funkcijo $W(\mathbf{b}_e)$, npr. oblike

$$W(\mathbf{b}_e) = U(J_e) + \frac{1}{2} \mu (\text{tr}[\mathbf{b}_e] - 3 - 2 \ln J_e) \quad (11)$$

je zgradba sferične in deviatorske komponente napetostnega tenzorja $\boldsymbol{\tau} = \tau_o \mathbf{1} + \text{dev}(\boldsymbol{\tau})$ drugačna, saj sta obe komponenti funkciji obeh spremenljivk J_e in $\bar{\mathbf{b}}_e$. Torej

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \partial_{\mathbf{b}_e} W \cdot \mathbf{b}_e = [J_e U'(J_e) - \mu] \mathbf{1} + \mu \mathbf{b}_e, \quad (12a)$$

in

$$\tau_o = J p = \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}] = J_e U'(J_e) + \mu (\frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{b}_e] - 1), \quad (12b)$$

$$\text{dev}[\boldsymbol{\tau}] = \mu \text{dev}[\mathbf{b}_e], \quad (12c)$$

$$\text{kjer je seveda} \quad \mathbf{b}_e = J_e^{2/3} \bar{\mathbf{b}}_e.$$

V tem prispevku se bomo omejili samo na plastično nestisljive materiale. Funkcija tečenja ima v tem primeru znano von Misesovo obliko

$$f(\boldsymbol{\tau}, Y) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| - Y(e_p), \quad (13a)$$

$$\|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| = (\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]:\text{dev}[\boldsymbol{\tau}])^{1/2}, \quad \text{dev}[\boldsymbol{\tau}] = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}]\mathbf{1}, \quad (13b,c)$$

kjer je Y napetost tečenja, e_p pa ekvivalentna plastična deformacija. Posebnost Misesove funkcije tečenja (13a) je v tem, da je njen odvod po $\boldsymbol{\tau}$, tj. $\partial_{\boldsymbol{\tau}} f = \sqrt{3/2} \mathbf{n}$, deviatorska veličina, namreč

$$\mathbf{n} = \text{dev}[\boldsymbol{\tau}] / \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| \quad \text{in} \quad \text{tr}[\mathbf{n}] = 0, \quad (14a,b)$$

kar zagotavlja nestisljivost plastičnega dela deformacij (dokaz glej v (Rojc, 2007), podrazdelek 3.3, en. (68)), torej

$$\dot{J}_p = 0, \quad \text{ali} \quad J_p = 1, \quad \text{ali} \quad J = J_e. \quad (15a,b,c)$$

Glede na dejstvo, da parametra Y in e_p enakovredno nadomeščata skalarja q in $\dot{\gamma}$ iz enačb (2), lahko v primeru von Misesove funkcije (13a) izrazimo pravilo tečenja (2b) takole:

$$-\mathcal{A} \mathbf{b}_e = \dot{e}_p \sqrt{6} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_e, \quad \text{ali} \quad -\mathbf{F} \cdot \partial_t(\mathbf{C}_p^{-1}) \cdot \mathbf{F}^T = \dot{e}_p \sqrt{6} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_e. \quad (16a,b)$$

V primeru majhnih elastičnih specifičnih deformacij, ki so značilne za kovine in mnoge druge materiale, veljajo omejitve:

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{b}_e - \mathbf{1}), \quad \|\mathbf{a}_e\| \ll 1 \quad \text{in} \quad \|\text{dev}[\mathbf{b}_e]\| \ll 1, \quad (17a,b,c)$$

zaradi katerih je bilo v prvem delu prispevka pravilo tečenja (2b) oz. (16) aproksimirano z izrazom

$$-\mathcal{A} \mathbf{b}_e = \dot{e}_p \sqrt{\frac{2}{3}} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \mathbf{n}, \quad -\mathbf{F} \cdot \partial_t(\mathbf{C}_p^{-1}) \cdot \mathbf{F}^T = \dot{e}_p \sqrt{\frac{2}{3}} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \mathbf{n}. \quad (18a,b)$$

Ob upoštevanju omejitve (17b) lahko aproksimiramo tudi obe zvezi med napetostnim tenzorjem in deformacijami, (10a) in (12a), in sicer obe z linearnim izrazom, poznanim iz geometrijsko linearne teorije. Torej:

$$\boldsymbol{\tau} \approx \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{a}_e = \lambda \text{tr}[\mathbf{a}_e] \mathbf{1} + 2 \mu \mathbf{a}_e, \quad (19a)$$

ali

$$\boldsymbol{\tau} \approx \boldsymbol{\sigma} = \kappa \text{tr}[\mathbf{a}_e] \mathbf{1} + 2 \mu \text{dev}[\mathbf{a}_e] = \kappa 3a_{e0} \mathbf{1} + 2 \mu \text{dev}[\mathbf{a}_e]. \quad (19b)$$

V geometrijsko linearni teoriji smo v 2. razdelku prvega dela članka (Rojc, 2007) namesto \mathbf{a}_e uporabili oznako $\boldsymbol{\epsilon}_e$, ki pomeni elastični del tenzorja *malih specifičnih deformacij* $\boldsymbol{\epsilon}$, tj. $\|\boldsymbol{\epsilon}\| \ll 1$. Tam so seveda vse veličine, tj. $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p$, $\boldsymbol{\epsilon}_e$ in plastični del $\boldsymbol{\epsilon}_p$, majhnega velikostnega reda.

V izrazu (19a) sta λ in μ Lamejevi konstanti. Ti dve konstanti sta v prvem členu druge oblike tega izraza, tj. v (19b), zaradi linearne zveze združeni v novo konstanto $\kappa = \lambda + 2/3 \mu$. Nadalje je v (19b) a_{e0} sferična komponenta elastičnega specifičnega deformacijskega tenzorja \mathbf{a}_e , $a_{e0} = 1/3 \text{tr}(\mathbf{a}_e)$. Slednja ima v primeru majhnih elastičnih deformacij preprosto geometrijsko razlago. Če upoštevamo v izrazu za totalno volumensko specifično deformacijo

$$\varepsilon_v = (dv - dV) / dV = J - 1, \quad (20a)$$

pogoj (15c), lahko zaradi omejitve $\|\mathbf{a}_e\| \ll 1$ dobljeni rezultat aproksimiramo takole:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{ve} = J_e - 1 \approx \text{tr}[\mathbf{a}_e] = 3 a_{e0}. \quad (20b)$$

V (20a) sta dv in dV prostornini elementarnega dela telesa v deformirani in nedeformirani legi.

Zaradi (20b) in lastnosti veličine $\text{dev}(\mathbf{a}_e)$ moremo za obe konstanti κ in μ poiskati zanimivo fizikalno razlago, ki jo opisujeta že prej vpeljana termina: kompresijski in strižni modul.

Iz podanega povzetka multiplikativne elasto-plastične teorije je razvidno, da lahko za kovinske materiale ob upoštevanju Misesove funkcije tečenja (13a) sestavimo različne nize konstitutivnih enačb. Namesto osnovnega niza, ki ga sestavlja hiperelastični zakon (2a), pravilo tečenja (16), Kuhn-Tuckerjevi pogoji obremenjevanja in razbremenjevanja (2c,d,e) s konsistentnim pogojem $\dot{f}(\boldsymbol{\tau}, q) = 0$, lahko z zamenjavo pravila tečenja z aproksimacijo (18) tvorimo novi niz. Drugačen niz lahko sestavimo tudi, če zamenjamo samo hiperelastični zakon (2a) z linearno elastično aproksimacijo (19). Izbira različnih nizov konstitutivnih enačb lahko privede do formiranja različnih algoritmov za numerično integracijo teh enačb. Na primer, numerični algoritem, ki ga uporablja komercialni program ABAQUS/Standard, temelji na zadnje opisanem nizu konstitutivnih enačb, tj., ki namesto hiperelastičnega zakona (2a) upošteva linearno aproksimacijo (19) (glej npr. »ABAQUS Theory Manual« v (ABAQUS, 2004) in tam navedeno literaturo). V našem prispevku bo izpeljava numeričnih algoritmov temeljila samo na prvih dveh navedenih nizih.

3 • NUMERIČNO REŠEVANJE KONSTITUTIVNIH ENAČB

3.1 Uvod

Tu bo nakratko opisana zasnova numeričnih algoritmov, ki jih je Simo objavil v (Simo,1988), (Simo,1992a) in (Simo,1992b). Pri tem se bomo omejili samo na obliko konstitutivnih enačb s von Misesovo funkcijo tečenja. Zato bosta v naslednjih podrazdelkih za primer te funkcije predstavljena dva algoritma, ki temeljita na različnih izhodiščih oziroma različnih modelih splošnih konstitutivnih enačb (2). Pri prvem modelu

(Model I) so upoštevane aproksimirane konstitutivne enačbe, tj. aproksimirana oblika pravila tečenja, (18), in *razdvojena energijska funkcija* oblike (7), ki jo lahko zaradi predpostavljenih majhnih elastičnih deformacij obravnavamo tudi kot *algoritemsko aproksimacijo splošnejše, nerazdvojene hiperelastične energijske funkcije* $W(\mathbf{b}_e)$, npr. oblike (11). Pri drugem modelu (Model II) je upoštevano neaproksimirano pravilo tečenja (16) in nerazdvojena oblika energijske

funkcije. Oba modela sta s primeri funkcijskih nastavkov $W(\mathbf{b}_e)$ in zvez med napetostjo in deformacijo prikazana v preglednici 1 (glej npr. 1. vrstico). Čeprav so izrazi, ki podajajo funkcijsko zvezo med napetostjo in deformacijo med seboj precej različni, se v primeru majhnih elastičnih deformacij vsi poenostavijo v klasični elastični zakon, znan iz linearne teorije (glej npr. 2. razdelek).

Oba algoritma podajata v osnovi izračun napetostnega tenzorja in matrike elasto-plastičnih modulov na koncu diskretnega časovnega koraka $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, kjer t_n in t_{n+1} označujeta njegov začetek in konec. Oba predstavljata sestavni del celovitega inkrementnega postopka reševanja elasto-plastičnih problemov z metodo končnih elementov, pri katerem rešujemo na globalnem nivoju ravnotežne enačbe, na lokalnem, tj. v integracijskih točkah končnih elementov, pa konstitutivne enačbe. Torej v vsaki integracijski točki elementa moramo za približek trenutne konfiguracije \mathcal{N}_{n+1} , ki ga dobimo z globalno iteracijo, izračunati poleg napetostnega tenzorja tudi spremenljivke stanja, ki opisujejo zgodovino obremenjevanja (tj. princip t. i. mešane Galerkin-kolokacijske metode).

Konstitutivni model I Aproximirano pravilo tečenja (18): $-\mathcal{L}\mathbf{b}_e = \dot{\gamma} \frac{2}{3} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \partial_{\tau} f$	Konstitutivni model II Nerazproksimirano pravilo tečenja (16): $-\mathcal{L}\mathbf{b}_e = \dot{\gamma} 2 \partial_{\tau} f(\boldsymbol{\tau}, q) \cdot \mathbf{b}_e$
Spremenljivke: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p$, $\mathbf{b}_e = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T$	
1. Hiperelastična energijska funkcija	
<i>Razdvojeni nastavek:</i> $W(\mathbf{b}_e) = U(J_e) + \bar{W}(\bar{\mathbf{b}}_e)$, <i>Primer:</i> $U(J_e) = \frac{1}{2} \kappa [\frac{1}{2} (J_e^2 - 1) - \ln J_e]$ $\bar{W}(\bar{\mathbf{b}}_e) = \frac{1}{2} \mu (\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}_e] - 3)$ kjer je: $\bar{\mathbf{b}}_e = J_e^{-2/3} \mathbf{b}_e$, $J_e = \det[\mathbf{F}_e] = \sqrt{\det[\mathbf{b}_e]}$	<i>Nerazdvojeni nastavek:</i> $W(\mathbf{b}_e)$, <i>Primer:</i> $W(\mathbf{b}_e) = \frac{1}{2} \lambda (\ln J_e)^2 + \mu (\frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{b}_e] - \ln J_e)$, kjer je: $J_e = \det[\mathbf{F}_e] = \sqrt{\det[\mathbf{b}_e]}$
2. Kirchhoffov napetostni tenzor: $\boldsymbol{\tau} = 2 \partial_{\mathbf{b}_e} W \cdot \mathbf{b}_e$, Cauchyjev nap. tenzor: $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \boldsymbol{\tau}$ $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2} \kappa (J_e^2 - 1) \mathbf{1} + \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}_e]$, $\boldsymbol{\tau} = \lambda \ln J_e \mathbf{1} + \mu (\mathbf{b}_e - \mathbf{1})$,	
3. von Misesova funkcija tečenja: $f(\boldsymbol{\tau}, Y)$, zakon utrjevanja: $h = dY/d\epsilon_p$ $f(\boldsymbol{\tau}, Y) = \sqrt{\frac{3}{2}} \ \text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\ - Y(\epsilon_p)$, $\ \text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\ = (\text{dev}[\boldsymbol{\tau}] : \text{dev}[\boldsymbol{\tau}])^{1/2}$, $\text{dev}[\boldsymbol{\tau}] = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}] \mathbf{1}$	
4. pravilo tečenja v primeru von Misesove funkcije $f(\boldsymbol{\tau}, Y)$: $-\mathbf{F} \cdot \partial_{\mathbf{b}_e} [C_p^{-1}] \cdot \mathbf{F}^T = \dot{\epsilon}_p \sqrt{\frac{2}{3}} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \mathbf{n}$, $-\mathbf{F} \cdot \partial_{\mathbf{b}_e} [C_p^{-1}] \cdot \mathbf{F}^T = \dot{\epsilon}_p \sqrt{6} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_e$, kjer je: $\mathbf{n} = \text{dev}[\boldsymbol{\tau}] / \ \text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\ $, $\dot{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}$	
5. Kuhn-Tuckerjeva oblika pogojev obremenitve in razbremenitve: enačba $f(\boldsymbol{\tau}, Y) = 0$ je t.i. pogoj tečenja $\dot{\epsilon}_p \geq 0$, $f(\boldsymbol{\tau}, Y) \leq 0$, $\dot{\epsilon}_p f(\boldsymbol{\tau}, Y) = 0$.	
6. Konsistentni pogoj: $\dot{f}(\boldsymbol{\tau}, q) = 0$.	

Preglednica 1 • Konstitutivne enačbe

3.2 Algoritem I za reševanje enačb modela I, (Simo,1988), (Simo,1992b)

Vzemimo, da sta na začetku koraka, tj. pri času t_n , znani notranji spremenljivki stanja $\bar{\mathbf{b}}_e$ in ϵ_{pn} , poleg njiju pa tudi deformacijski gradient \mathbf{F}_n . V času t_{n+1} naj bo znan samo \mathbf{f}_{n+1} , ali \mathbf{F}_{n+1} , ki ju določimo na podlagi znanih konfiguracij \mathcal{N}_{n+1} , \mathcal{N}_n in \mathcal{N}_0 , namreč

$$\mathbf{F}_{n+1} = (\partial \mathbf{x}_{n+1} / \partial \mathbf{X}_n) (\partial \mathbf{X}_n / \partial \mathbf{X}_0) = \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_n, \quad (21a)$$

$$J_{n+1} = \det[\mathbf{F}_{n+1}], \quad J_n = \det[\mathbf{F}_n], \quad j_{n+1} = \det[\mathbf{f}_{n+1}], \quad J_{n+1} = j_{n+1} J_n. \quad (21b-e)$$

Napetostni tenzor $\boldsymbol{\tau}$ in notranji spremenljivki stanja, $\bar{\mathbf{b}}_e$ in ϵ_p , na koncu opazovanega koraka t_{n+1} bomo določili z numerično integracijo aproksimiranih konstitutivnih enačb (2) oz. enačb modela I, podanih od 2. do 6. vrstice v preglednici 1. Zasnova numerične integracije bo prikazana v nadaljevanju.

Najprej se lotimo ustrezne diskretizacije pravila tečenja (18), ki je edino zapisano v hitrostni obliki. Pri tem upoštevajmo tudi dodatni pogoj (15a), kljub temu da je v zveznem okolju avtomatično izpolnjen. Od obeh oblik pravila tečenja (18) upoštevajmo drugo, v kateri je hitrost deformacijskega tenzorja izražena v materialnem opisu. V tem opisu je namreč posebni Liejev odvod prostorskega polja \mathbf{b}_e funkcija parcialnega odvoda materialnega polja \mathbf{C}_p^{-1} po času t . Torej, obe enačbi, (18b) in (15a), prepišimo v naslednjo obliko:

$$\partial_t [C_p^{-1}] = -\dot{\epsilon}_p \sqrt{\frac{2}{3}} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad \dot{J}_p = 0, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (22)$$

in ju nato diskretizirajmo po Eulerjevi implicitni diferencialni shemi, (Simo,1988), takole:

$$C_{pn+1}^{-1} - C_{pn}^{-1} = -(\epsilon_{pn+1} - \epsilon_{pn}) \sqrt{\frac{2}{3}} \text{tr}[\mathbf{b}_{e,n+1}] \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \cdot \mathbf{n}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_{n+1}^{-T}, \quad (23a)$$

$$J_{pn+1} - J_{pn} = 0, \quad \text{ali} \quad \det[C_{pn+1}^{-1}] = \det[C_{pn}^{-1}]. \quad (23b,c)$$

OPOMBA 1. Iz (23a) je razvidno, da stacionarnost plastičnega dela volumna, ki ga narekuje von Misesova funkcija tečenja, ne more biti zagotovljena brez dodatnega diskretnega pogoja (23c). Namreč, če izračunamo sled obeh strani enačbe (23a), dobimo $\text{tr}(C_{pn+1}^{-1}) = \text{tr}(C_{pn}^{-1})$, kar pa ni enakovredno enačbi (23c), saj v primeru končnih deformacij $\text{tr}(C_p^{-1}) \neq \det(C_p^{-1})$.

Levi strani diskretiziranih enačb (23) transformirajmo s pomočjo operacije vrnitve (4) in relacij iz (1a) in (4) v prostorsko obliko. Tako dobimo:

$$\mathbf{b}_{e,n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{b}_{e,n} \cdot \mathbf{f}_{n+1}^T - \Delta \epsilon_p \sqrt{\frac{2}{3}} \text{tr}[\mathbf{b}_{e,n+1}] \mathbf{n}_{n+1}, \quad (24a)$$

$$\Delta \epsilon_p = \epsilon_{pn+1} - \epsilon_{pn}, \quad (24b)$$

$$\det[\mathbf{b}_{e,n+1}] = \det[\mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{b}_{e,n} \cdot \mathbf{f}_{n+1}^T], \quad \text{ali} \quad (24c)$$

$$\det[\mathbf{b}_{e,n+1}] = (J_{n+1})^2, \quad \text{saj je} \quad J_e = J. \quad (24d)$$

Ker je v enačbi (10a) deviatorski del napetostnega tenzorja izražen z volumensko nevtralizirano veličino $\bar{\mathbf{b}}_e$, (9a), vpeljimo to veličino tudi v obe zgornji enačbi. Za ta namen vstavimo v (24) izraze $\mathbf{b}_{e,n+1} = J_{e,n+1}^{2/3} \bar{\mathbf{b}}_{e,n+1}$ in $\mathbf{b}_{e,n} = J_{e,n}^{2/3} \bar{\mathbf{b}}_{e,n}$ in ob pomoči znanih relacij (1b), (21e) in (23b) izpeljimo

$$\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}} = \bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E - \Delta e_p \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}] \mathbf{n}_{n+1}, \quad \Delta e_p = e_{pn+1} - e_{pn}, \quad (25a,b)$$

$$\det[\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}] = \det[\bar{\mathbf{f}}_{n+1} \cdot \bar{\mathbf{b}}_{e_n} \cdot \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^T] \Rightarrow$$

$$\det[\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}] = \det[\bar{\mathbf{b}}_{e_n}] = 1, \quad \det[\bar{\mathbf{f}}_{n+1}] = 1 \quad (25c,d)$$

kjer je

$$\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E = \bar{\mathbf{f}}_{n+1} \cdot \bar{\mathbf{b}}_{e_n} \cdot \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^T, \quad \bar{\mathbf{f}}_{n+1} = \mathbf{j}_{n+1}^{-1/2} \mathbf{f}_{n+1}, \quad (26a,b)$$

$$\mathbf{n}_{n+1} = \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}] / \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}]\| \quad (26c)$$

Pri tem smo vpeljali novo spremenljivko $\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E$, katere pomen bomo spoznali v nadaljevanju. Dobljeni diskretizirani enačbi, (25a) in (25c), sestavljata skupaj z ostalimi konstitutivnimi enačbami iz preglednice 1, tj.:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = p_{n+1} J_{e_{n+1}} \mathbf{1} + \mu \operatorname{dev}[\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}], \quad p_{n+1} = U'(J_{e_{n+1}}), \quad (27a,b)$$

$$\Delta e_p \geq 0, \quad f_{n+1} \leq 0, \quad \Delta e_p f_{n+1} = 0, \quad (27c,d,e)$$

$$f_{n+1} = f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, Y_{n+1}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}]\| - Y(e_{pn+1}), \quad e_{pn+1} = e_{pn} + \Delta e_p, \quad (27f)$$

osnovo za izračun napetostnega tenzorja $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ in notranjih spremenljivk stanja $\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}$ in e_{pn+1} na koncu obravnavanega koraka $\Delta t = t_{n+1} - t_n$.

OPOMBA 2. Vse enačbe v (25) in (27) so zapisane v prostorski obliki, kar pomeni, da je definicijsko območje tenzorjev končna konfiguracija \mathcal{X}_{n+1} , ki v okviru celovitega numeričnega postopka predstavlja približek iskane ravnotežne konfiguracije računskega modela telesa. Breznapetostna konfiguracija telesa \mathcal{X}_{n+1} je na začetku koraka posredno definirana s $\bar{\mathbf{b}}_{e_n}$, na koncu pa s spremenljivko $\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}$, saj sta po enačbi (4), $\mathbf{b}_e = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T$, obe direktno povezani z njo. V zvezi z zgornjimi enačbami naj še omenimo, da bi lahko na celotnem časovnem območju (t_n, t) nadomestili determinanto J_e kar z determinanto J totalne deformacije. Zaradi nestisljivosti plastičnega dela deformacije namreč velja identiteta $J_e(t) = J(t)$, (glej npr. (15c)).

Na začetku koraka je napetostni tenzor enolično določen z znanimi spremenljivkami stanja $\bar{\mathbf{b}}_{e_n}$ in e_{pn} ter determinanto $J_n \equiv J_{e_n}$. Ker je do trenutka t_n znana zgodovina razvoja plastičnih deformacij, je pri t_n znano tudi trenutno stanje materialnih točk, tj. elastično ali plastično. V obravnavanem koraku Δt materialnega stanja še ne poznamo in ga je potrebno ugotoviti iz diskretiziranih enačb (27) in (25). Te naloge pa se lotimo takole: zamrznimo morebitno plastično stanje na vrednost iz začetka koraka, torej $e_{pn+1}^E = e_{pn}$, v nadaljevanju pa poiskujemo najprej z elastičnim stanjem, tj. $\Delta e_p^E = 0$. V tem primeru sledi iz (25a) identiteta $\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}} = \bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E$, ki pojasnjuje pomen tenzorja $\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E$, tj. predstavlja totalni levi elastični deformacijski tenzor na koncu koraka ob predpostavljene elastičnem inkrementu $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Z upoštevanjem te identitete dobimo iz (27a) in (27b) izraze za t. i. poizkusni napetostni tenzor

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E = p_{n+1} J_{e_{n+1}} \mathbf{1} + \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E], \quad (28a)$$

$$p_{n+1} = U'(J_{e_{n+1}}), \quad \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E] = \mu \operatorname{dev}[\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E], \quad e_{pn+1}^E = e_{pn}. \quad (28b,c,d)$$

Zgoraj sta $\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E$ in $J_{e_{n+1}}$ poznani veličini. Prva, ki je definirana z (26a), je namreč funkcija znanih tenzorjev $\bar{\mathbf{f}}_{n+1}$ in $\bar{\mathbf{b}}_{e_n}$, drugo pa lahko glede na (15c) in (21e) izrazimo tudi takole $J_{e_{n+1}} = J_{n+1} = \mathbf{j}_{n+1} J_n$. S pomočjo pogojev obremenjevanja in razbremenjevanja (27d,e) preverimo nato morebitno stanje materialne točke, in če pri tem ugotovimo, da je stanje elastično, $f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E, Y(e_{pn+1}^E)) \leq 0$, je izračun napetosti in obeh spremenljivk $\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}} = \bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E$ ter $e_{pn+1} = e_{pn+1}^E$ končan in lahko nadaljujemo z izračunom elastičnih modulov. V primeru plastičnega stanja, tj. $f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E, Y(e_{pn+1}^E)) > 0$, moramo $\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}$, e_{pn+1} in $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ izračunati tako, da bo pogoj plastičnega tečenja $f_{n+1} = 0$ izpolnjen tudi na koncu obravnavanega koraka. Opisani postopek je v primeru von Misesove funkcije tečenja poznan kot metoda *elastičnega prediktorja in radialnega korektorja*. Vse faze omenjene metode so skupaj z enačbami prikazane v preglednici 2 (delno povzeto po (Simo, 1988) in (Simo, 1998)).

1. Izračun deformacijskih gradientov (znano: $\mathbf{X}_0, \mathbf{x}_n, \Delta \mathbf{u}$):

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{u} \quad (\text{lega materialne točke v konfiguraciji } \mathcal{X}_{n+1})$$

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{1} + \nabla_n \Delta \mathbf{u} \quad (\text{relativni deformacijski gradient glede na } \mathcal{X}_n)$$

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_n \quad (\text{totalni deformacijski gradient glede na } \mathcal{X}_0)$$

$$J_{n+1} = \det[\mathbf{F}_{n+1}]$$

2. Izračun elastičnega prediktorja (znano: $\bar{\mathbf{b}}_{e_n}, e_{pn}$):

$$\bar{\mathbf{f}}_{n+1} = (\det[\mathbf{f}_{n+1}])^{-1/2} \mathbf{f}_{n+1},$$

$$\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E = \bar{\mathbf{f}}_{n+1} \cdot \bar{\mathbf{b}}_{e_n} \cdot \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^T,$$

$$I_0^E = \frac{1}{3} \operatorname{tr}[\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E], \quad \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E] = \mu (\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E - I_0^E \mathbf{1}) = \mu \operatorname{dev}[\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E],$$

$$J_{e_{n+1}} = J_{n+1}, \quad p_{n+1} = U'(J_{e_{n+1}});$$

3. Kontrola materialnega stanja oz. funkcije tečenja

$$f_{n+1}^E = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E]\| - Y(e_{pn}):$$

Če je $f_{n+1}^E \leq 0$: postavimo: $\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}} = \bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^E$, $e_{pn+1} = e_{pn}$

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = p_{n+1} J_{e_{n+1}} \mathbf{1} + \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E], \Rightarrow \text{KONEC}$$

Če je $f_{n+1}^E > 0$: \Rightarrow 4. točka

4. Plastični (radialni) korektor:

Izračun Δe_p iz enačbe pogoja tečenja (v primeru nelinearne funkcije $Y(e_p)$) poiščemo rešitev Δe_p z iterativnim postopkom:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E]\| - 3\mu I_0^E \Delta e_p - Y(e_{pn} + \Delta e_p) = 0$$

$$\Rightarrow e_{pn+1} = e_{pn} + \Delta e_p$$

Korekcija deviatorja napetostnega tenzorja:

$$\beta = \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E]\| - \sqrt{\frac{3}{2}} 3\mu I_0^E \Delta e_p, \quad \text{ali} \quad \beta = \sqrt{\frac{3}{2}} Y(e_{pn+1})$$

$$\mathbf{n}_{n+1} = \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E] / \|\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E]\|,$$

$$\operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}] = \beta \mathbf{n}_{n+1};$$

5. Končni izračun napetostnega tenzorja:

Sferična komponenta: $(\tau_0)_{n+1} = p_{n+1} J_{e_{n+1}}$

Napetost: $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = (\tau_0)_{n+1} \mathbf{1} + \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}]$;

6. Definicija nove breznapetostne konfiguracije (aproksimativna varianta):

$$\bar{\mathbf{b}}_{e_{n+1}} = I / \mu \operatorname{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}] + I_0^E \mathbf{1}$$

Preglednica 2 • Izračun napetosti in spremenljivk stanja $\bar{\mathbf{b}}_e$ in e_p po metodi elastičnega prediktorja-radialnega korektorja

V nadaljevanju si pogloblje oglejmo samo 6. fazo, v kateri je potrebno izvršiti končni izračun spremenljivke $\bar{\mathbf{b}}_{en+1}$. V omenjeni preglednici je ta izračun predstavljen z aproksimativno formulo, ki je predlagana v (Simo,1988). Privlačnost te formule je v tem, da ne zahteva nobenih dodatnih izračunov. Deviatorski komponenti $dev(\bar{\mathbf{b}}_{en+1})$, ki sledi iz zveze (27a) po končanem izračunu napetostnega tenzorja v 5. fazi, je namreč prištet samo sferični del elastičnega prediktorja $l_0^E = \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}_{en+1})$. Slednji je v preglednici 2 izračunan v 2. fazi iz enačbe (25a). Tu je potrebno opozoriti, da determinanta tako definirane spremenljivke $\bar{\mathbf{b}}_{en+1}$ zagotovo ne more biti enaka 1, kot je to zahtevano z dodatno vezno enačbo (25c) ali (24d), kljub temu, da je v tej fazi druga vezna enačba (25d) upoštevana (glej 1. vrstico v 2. fazi preglednice 2). Kljub tej kršitvi pa je vpliv predlagane aproksimacije na točnost izračuna vseh ostalih mehanskih veličin zanemarljiv. V tem algoritmu, ki je veljaven samo za primere z majhnimi totalnimi elastičnimi deformacijami, $\|\text{dev}(\bar{\mathbf{b}}_{en})\| \ll 1$, je namreč uporabljena razdvojena energijska funkcija oblike (7).

Zgornja aproksimacija sferičnega dela spremenljivke $\bar{\mathbf{b}}_{en+1}$, ki temelji na neupoštevanju vezne enačbe (25c), pa je neustrezna v vseh tistih primerih, pri katerih ima spremenljivka $\bar{\mathbf{b}}_{en+1}$, ali tudi \mathbf{b}_{en+1} , pomembno vlogo pri izračunu sferičnih komponent ostalih veličin. Eden izmed takih primerov je v okviru termoplastičnih problemov obravnavan v (Simo,1992b). Na drugega bi lahko naleteli tudi pri reševanju konstitutivnega modela I, če bi namesto razdvojene energijske funkcije iz preglednice 1 upoštevali nerazdvojeno (glej npr. model II v preglednici 1). V tem primeru je namreč sferična komponenta napetostnega tenzorja $\boldsymbol{\tau}$ odvisna tudi od $\text{tr}(\mathbf{b}_e)$ (glej npr. en. (12b)). Za ta primer moramo izračunati sferični del spremenljivke \mathbf{b}_{en+1} tako, da bo izpolnjena tudi vezna enačba (24d). Ta izračun lahko izvedemo po postopku, predlaganem v (Simo,1992b). Če označimo z l_1 in l_3 prvo in tretjo invarianto \mathbf{b}_{en+1} , tj. $l_1 = \text{tr}(\mathbf{b}_{en+1})$ in $l_3 = \det(\mathbf{b}_{en+1})$, z l_2 in l_3 pa ustrezne invariante deviatorskega dela, $dev(\mathbf{b}_{en+1})$, dobimo rešitev za sferični del spremenljivke \mathbf{b}_{en+1} , tj. $l_0 = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{b}_{en+1}) \equiv \frac{1}{3} l_1$ iz naslednje zveze med omenjenimi invariantami, (Fung,1965):

$$\left(\frac{1}{3} l_1\right)^3 - \left(\frac{1}{3} l_1\right) l_2 + l_3 - l_3 = 0. \quad (29)$$

Pri definiranju tretje invariante l_3 upoštevamo pogoj (24d), tj. $l_3 = (J_{n+1})^2$, pri izračunu invariant l_2 in l_3 pa si lahko pomagamo z znanimi zvezami, npr. (12c), saj je $dev(\mathbf{b}_{en+1}) = (1/\mu) dev(\boldsymbol{\tau}_{n+1})$. Torej:

$$l_2 = \frac{1}{2} dev[\mathbf{b}_{en+1}] : dev[\mathbf{b}_{en+1}] = \frac{1}{2} (\|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}]\|/\mu)^2, \quad (30a)$$

$$l_3 = \det[dev[\boldsymbol{\tau}_{n+1}]]/\mu^3. \quad (30b)$$

Za kovinske materiale sta invarianti l_2 in l_3 majhnega velikostnega reda (glej omejitve norme $\|\text{dev}(\mathbf{b}_{en})\|$ en. (17c)), kar vodi v oceno pozitivne diskriminante kubične enačbe (29) in v izračun samo enega in edinega realnega korena, (Simo,1992b).

Za končno formiranje algoritma je potrebno izpeljati še izraze matrike t. i. diskretnih elasto-plastičnih modulov. Izpeljavo izvršimo v okviru linearizacije algoritemske definicije Kirchhoffovega napetostnega tenzorja, podane v preglednici 2. Torej, (Simo,1988)

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{L} : d\mathbf{g}, \quad (31)$$

kjer je (primerjaj z Liejevim odvodom metričnega tenzorja v (Rojč, 2005))

$$\mathbf{L} = 2 \partial\boldsymbol{\tau}/\partial\mathbf{g}, \quad d\mathbf{g} = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \cdot d\mathbf{C}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_{n+1}^{-1} = \frac{1}{2} (\nabla_{n+1} d\mathbf{u} + \nabla_{n+1} d\mathbf{u}^T). \quad (32a,b)$$

Zgoraj je \mathbf{L} tenzor t. i. diskretnih elasto-plastičnih modulov, z \mathbf{g} smo označili metrični tenzor v trenutni konfiguraciji \mathcal{H}_{n+1} , z $d\mathbf{u}$ pa diferenciala vektorja pomika. Pri tem smo upoštevali, da je $\boldsymbol{\tau}$ glede na podani algoritem v preglednici 2 funkcija spremenljivk $\{\mathbf{g}, \bar{\mathbf{b}}_e, e_p\}$. Ker smo v vseh zgornjih izpeljavah upoštevali v trenutni konfiguraciji \mathcal{H}_{n+1} kartezične tenzorske strukture, torej $\mathbf{g} = \mathbf{1}$, smo metrični tenzor v izrazih večinoma izpuščali, razen v definiciji sferičnih komponent, npr. $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{1}$. Iz tega vidika je zapis enačb v preglednici 2 nepopoln in se moramo lotiti izpeljave diskretnih modulov drugače. V ta namen pretvorimo izraze iz preglednice 2 v materialno (tj. kovariantno) obliko. Pri tem imamo dve možnosti, in sicer, da jih izrazimo s tenzorji, definiranimi v območju totalne začetne konfiguracije \mathcal{H}_0 ali pa konfiguracije \mathcal{H}_n iz začetka obravnavanega koraka. V prvem primeru se polje Kirchhoffovega napetostnega tenzorja $\boldsymbol{\tau}$ transformira v polje 2. Piola Kirchhoffovega napetostnega tenzorja \mathbf{S} nad območjem \mathcal{H}_0 , niz spremenljivk $\{\mathbf{1}, \bar{\mathbf{b}}_e, e_p\}$ pa v $\{\mathbf{C}, \bar{\mathbf{C}}_p^{-1}, e_p\}$, kjer desni Cauchy-Greenov deformacijski tenzor \mathbf{C} prevzame vlogo metričnega tenzorja v \mathcal{H}_0 . Tenzor diskretnih elasto-plastičnih modulov \mathbf{L}_0 v tem opisu dobimo potem z linearizacijo napetosti \mathbf{S} , torej

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}, \bar{\mathbf{C}}_p^{-1}, e_p), \quad (33a,b)$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{L}_0 : d\mathbf{C}, \quad \text{kjer je } \mathbf{L}_0 = 2 \partial\mathbf{S}/\partial\mathbf{C}. \quad (33c,d)$$

Tenzor \mathbf{L} izpeljemo nato z operacijo vrnitve modulov \mathbf{L}_0 v prostorski opis

$$\mathbf{L} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{F}^T) \cdot \mathbf{F}^T. \quad (34)$$

Formule za izračun elasto-plastičnih modulov lahko najdemo v delih (Simo,1988) in (Simo,1998). Kot zanimivost naj navedemo, da je tenzor diskretnih elasto-plastičnih modulov simetričen. Ta lastnost je posledica uporabe Kirchhoffovega napetostnega tenzorja tudi v funkciji tečenja in razdvojene energijske funkcije $\underline{W}(\mathbf{b}_e)$.

3.3 Eksponentni algoritem za reševanje enačb modela II, (Simo, 1992a)

V delu (Simo,1992a) je obravnavan razvoj algoritmov za reševanje statičnih in dinamičnih elasto-plastičnih problemov, ki temeljijo na eksponentni aproksimaciji enoparametričnih konstitutivnih diferencialnih enačb. Pri tem je upoštevana multiplikativna teorija elasto-plastičnosti, izotropni hiperelastični odziv, izotropno in kinematično utrjevanje plastičnih deformacij, asociativna plastičnost in poljubna definicija dopustnega konveksnega elastičnega območja (angl.: multi surface plasticity). Torej, ploskev plastičnega tečenja je lahko sestavljena iz množice ploskev, katerih vektor normale ni nujno zvezen na presečnih krivuljah. V tem podrazdelku bomo predstavili zasnovo eksponentnega algoritma samo za statične probleme in izotropno utrjevanje s von Misesovo funkcijo tečenja, in sicer v okviru naloge, nakazane v uvodnem podrazdelku.

Podobno kot v prejšnjem primeru se lotimo tudi tu najprej diskretizacije pravila tečenja, seveda v njegovi prvotni, nepoenostavljeni obliki (16) (glej model II v preglednici 1). Pri tem bomo uporabljali oznake, ki smo jih vpeljali že v prejšnjem podrazdelku. Za izhodišče izberimo obliko pravila tečenja (16b), v kateri je hitrost deformacijskega tenzorja podana v materialnem opisu, torej

$$-\mathbf{F} \cdot \partial_t(\mathbf{C}_p^{-1}) \cdot \mathbf{F}^T = \dot{e}_p \sqrt{6} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_e. \quad (35)$$

Vse tenzorje v tej enačbi nato s pomočjo definicij (6) in (4), in po množenju z \mathbf{F}^{-1} in \mathbf{F}^T , pretvorimo v materialni opis:

$$\partial_t(\mathbf{C}_p^{-1}) = -\sqrt{6} \dot{e}_p \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}_p^{-1}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}. \quad (36a,b)$$

Zgoraj je \mathbf{N} t. i. materialni ekvivalent k deviatorski enoti \mathbf{n} , ki je v smislu konvektivnih koordinatnih sistemov definiran kot kovariantni tenzor. Deformacijski tenzor \mathbf{C} ima pri tem vlogo metričnega tenzorja v konfiguraciji \mathcal{N}_0 . Vsi tenzorji v gornji enačbi pripadajo opazovanemu trenutku t , definicijsko območje pa je začetna konfiguracija \mathcal{N}_0 . Iz vidika teorije navadnih diferencialnih enačb lahko tenzorsko enačbo (36) tolmačimo kot sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda, v katerem predstavljajo komponente tenzorja \mathbf{C}_p^{-1} matriko linearno neodvisnih rešitev $\mathbf{z}(t)$, produkt veličin $(\dot{e}_p \sqrt{6} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{N})$ pa sestavlja matriko časovno odvisnih koeficientov $\mathbf{A}(t)$. Reševanje takega sistema diferencialnih enačb si lahko poenostavimo z razdelitvijo časovnega območja na intervale, matriko koeficientov znotraj posameznega intervala pa nadomestimo z matriko konstant, ki jo ovrednotimo v nekem vmesnem trenutku \tilde{t} omenjenega intervala ali inkrementa. V tipičnem inkrementu (t_n, t_{n+1}) dobimo tedaj sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti $\tilde{\mathbf{A}}$. Rešitev takega sistema pri znanem začetnem pogoju

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{z}(t), \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad \mathbf{z}(t=t_n) = \mathbf{z}_n, \quad (37)$$

je dana z $\mathbf{z}(t) = \exp((t - t_n)\tilde{\mathbf{A}}) \mathbf{z}_n$, kjer je $\exp(\Delta t \tilde{\mathbf{A}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \tilde{\mathbf{A}}^k$

(glej npr. (Vidav, 1976), (Gurtin, 1981)). V smislu omenjene rešitve vpeljimo sedaj eksponentno aproksimacijo enačbe pravila tečenja (36) takole, (Simo, 1992a),

$$\mathbf{C}_{p,n+1}^{-1} = \exp[-\sqrt{6}(e_{p,n+1} - e_{p,n}) \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{n+1}] \cdot \mathbf{C}_{p,n}^{-1}, \quad (38)$$

kjer smo z indeksom 'n+1' označili tenzorje, ki predstavljajo algoritemsko aproksimacijo iskane rešitve problema. Na lokalnem nivoju sta to spremenljivki $\mathbf{C}_{p,n+1}^{-1}$ in \mathbf{N}_{n+1} . Kot v prejšnjem podrazdelku, smo za \tilde{t} izbrali t_{n+1} , in zato vse veličine, ki so označene z omenjenim indeksom, opisujejo mehansko stanje računskega modela v iterativnem približku iskane ravnotežne konfiguracije \mathcal{N}_{n+1} . Zgornjo enačbo ob pomoči znanih zvez med \mathbf{b}_e in \mathbf{C}_p , (4), ter med \mathbf{f}_{n+1} , \mathbf{F}_{n+1} in \mathbf{F}_n , (21a), vrnilo v prostorski opis:

$$\mathbf{b}_{e,n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \exp[-\sqrt{6}(e_{p,n+1} - e_{p,n}) \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{n+1}] \cdot \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{b}_{e,n} \cdot \mathbf{f}_{n+1}^T. \quad (39)$$

Glede na podano definicijo eksponentne funkcije $\exp(\mathbf{A})$, velja $\mathbf{F} \cdot \exp(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{F}^{-1} = \exp(\mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1})$. Upoštevajmo to lastnost v (39) in poleg nje še definicijo \mathbf{C} , (6), ter \mathbf{N} , (36b), in končno zapišimo diskretizirano pravilo tečenja (39) skupaj z ostalimi enačbami, ki tvorijo osnovo t. i. enokoračnega eksponentnega algoritma numerične integracije konstitutivnih enačb, takole

$$\mathbf{b}_{e,n+1} = \exp[-\sqrt{6} \Delta e_p \mathbf{n}_{n+1}] \cdot \mathbf{b}_{e,n+1}^E, \quad \mathbf{b}_{e,n+1}^E = \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{b}_{e,n} \cdot \mathbf{f}_{n+1}^T, \quad (40a,b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{b}_e)}{\partial \mathbf{b}_e} \Big|_{\mathbf{b}_e = \mathbf{b}_{e,n+1}} \cdot \mathbf{b}_e, \quad \mathbf{n}_{n+1} = \frac{\text{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}]}{\|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}]\|}, \quad (40c,d)$$

$$e_{p,n+1} = e_{p,n} + \Delta e_p, \quad (40e)$$

$$\Delta e_p \geq 0, \quad f_{n+1} \leq 0, \quad \Delta e_p f_{n+1} = 0. \quad (40f,g,h)$$

Reševanja gornjih enačb se lotimo na enak način kot v prejšnjem postopku (algoritem I). Najprej predpostavimo poizkusno elastično stanje, tj. $\mathbf{b}_{e,n+1}^E$, in iz (40c) izračunamo poizkusni napetostni tenzor $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E$. Če pogoj tečenja (40g) potrjuje elastično stanje, torej $f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E, e_{p,n+1}^E) \leq 0$, potem predstavljajo veličine $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^E$, $\mathbf{b}_{e,n+1} = \mathbf{b}_{e,n+1}^E$ in $e_{p,n+1} = e_{p,n}$ algoritemsko rešitev konstitutivnih enačb. V nasprotnem primeru je potrebno rešitev sistema (40) poiskati tako, da bodo ob upoštevanju diskretiziranega pravila tečenja (40a) izpolnjene pogojne neenačbe (40f,g). Namesto da bi nadaljevali z izpeljavo integracijskega algoritma za plastično območje, si raje oglejmo pomembne lastnosti algoritemske aproksimacije (40a) zveznega pravila tečenja (16). Te predstavljajo namreč osnovo za formiranje celotnega algoritma, podanega v (Simo, 1992a).

Enačbo (40a) lahko v smislu linearne algebre zapišemo kot $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, kjer so \mathbf{A} , \mathbf{B} in \mathbf{C} matrike, pri čemer sta \mathbf{B} in \mathbf{C} tudi simetrični. Kot vemo pa simetričnost matrik \mathbf{B} in \mathbf{C} v splošnem ne zagotavlja tudi simetričnosti njunega produkta, namreč $\mathbf{A}^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T = \mathbf{C}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{A}$. Zato si najprej oglejmo, pod katerimi pogoji je simetričnost matrike \mathbf{A} oziroma iskane rešitve $\mathbf{b}_{e,n+1}$ zagotovljena. V našem primeru iščemo seveda samo tako rešitev problema, ki bo izpolnjevala temeljni zahtevi multiplikativne teorije plastičnosti, tj. (1d) in (1e) ali $\text{def}(\mathbf{b}_e) > 0$ in $\text{det}(\mathbf{C}_p) > 0$. Glede na njuni definiciji morata biti oba tenzorja, \mathbf{b}_e in \mathbf{C}_p , simetrična. V (40b) je $\mathbf{b}_{e,n}$ znana rešitev iz predhodnega koraka. Torej, $\mathbf{b}_{e,n}$ je simetrični tenzor s pozitivno determinanto, za katerega lahko izračunamo lastne vrednosti in normirane lastne vektorje. Iz (40b) sledi, da je tudi elastični prediktor $\mathbf{b}_{e,n+1}^E$ simetrični tenzor s pozitivno determinanto, če je $\text{det}(\mathbf{f}_{n+1}) > 0$. Normirani lastni vektorji prediktorja $\mathbf{b}_{e,n+1}^E$ so zaradi privzete elastične izotropije enaki lastnim vektorjem poizkusnega napetostnega tenzorja $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^E$ in njemu pripadajočega tenzorja \mathbf{n}_{n+1} . Zato lahko upravičeno sklepamo, da so lastni vektorji oziroma smeri vseh treh matrik v gornji matrični enačbi enaki in da je matrika \mathbf{A} oziroma algoritemska rešitev $\mathbf{b}_{e,n+1}$ simetrična.

V nadaljevanju pokažimo, da se lastnost pozitivne determinante v enačbi diskretiziranega pravila tečenja, tj. (40a), prenaša na iskano rešitev $\mathbf{b}_{e,n+1}$, in da se s to enačbo v primeru von Misesove funkcije tečenja ohranja tudi stacionarnost plastičnega dela volumna. Oba dokaza bosta izvedena po (Simo, 1992a). Izračunajmo najprej determinanti obeh strani omenjene enačbe, pri čemer si pomagajmo z znano

relacijo: $\det(\mathbf{A}) = \exp(\text{tr}(\mathbf{A}))$, ki jo sicer lahko izpeljemo iz definicije eksponentne funkcije. Torej:

$$\det[\mathbf{b}_{e_{n+1}}] = \exp[-\sqrt{6} \Delta e_p \text{tr}[\mathbf{n}_{n+1}]] \det[\mathbf{b}_{e_{n+1}}^E], \quad (41)$$

kjer glede na predhodna pojasnila velja $\mathbf{b}_{en} = \mathbf{b}_{en}^T$ in $\det(\mathbf{b}_{en}) > 0$, in zaradi (40b) ter $\det(\mathbf{f}_{n+1}) > 0$ tudi

$$\det[\mathbf{b}_{e_{n+1}}^E] = (\det[\mathbf{f}_{n+1}])^2 \det[\mathbf{b}_{en}] > 0. \quad (42)$$

Ker je $\exp(-\sqrt{6} \Delta e_p \text{tr}[\mathbf{n}_{n+1}]) > 0$, potem zaradi (42) iz (41) sledi $\det(\mathbf{b}_{e_{n+1}}) > 0$.

Druga lastnost je, kot je že bilo omenjeno, posledica von Misesove funkcije tečenja. V tem primeru je namreč \mathbf{n} deviator, torej $\text{tr}(\mathbf{n}) = 0$, in zato iz (41) ob upoštevanju (42) sledi enakost

$$\text{tr}[\mathbf{n}_{n+1}] = 0 \Rightarrow \det[\mathbf{b}_{e_{n+1}}] = \det[\mathbf{b}_{e_{n+1}}^E] = (\det[\mathbf{f}_{n+1}])^2 \det[\mathbf{b}_{en}]. \quad (43)$$

Glede na izpeljave iz prejšnjega podrazdelka lahko zadnjo enačbo izrazimo tudi z naslednjimi identitetami (primerjaj z (24c), (23b) in (23c), saj je npr. $\det(\mathbf{b}_{en}) = (J_e)^2$):

$$J_{e_{n+1}} = j_{n+1} J_{en}, \text{ ali } J_{p_{n+1}} = J_{pn}, \text{ ali } \det[\mathbf{C}_{p_{n+1}}^{-1}] = \det[\mathbf{C}_{pn}^{-1}]. \quad (44)$$

Te pa potrjujejo tudi drugo lastnost eksponentne aproksimacije (40a) pravila tečenja (35). Pri algoritmu I identitete (44) niso avtomatično izpolnjene z rešitvijo diskretizirane enačbe (24a) ali (25a), temveč so uporabljene pri izračunu sferične komponente iskane rešitve $\mathbf{b}_{e_{n+1}}$.

Iz podane analize eksponentne aproksimacije pravila tečenja je razvidno, da je reševanje konstitutivnih enačb (40) najprimerneje izvršiti kar v sistemu lastnih vektorjev tenzorja \mathbf{b}_e . Na tej osnovi, tj. spektralni dekompoziciji tenzorjev v diagonalno obliko, so zasnovani tudi algoritmi, formulirani v (Simo, 1992a).

4 • PREIZKUS OBJEKTIVNOSTI NUMERIČNIH ALGORITMOV

4.1 Uvod in opis numeričnih modelov

V tem razdelku so predstavljeni rezultati preizkusov različnih numeričnih algoritmov glede izpolnjevanja plastične nestisljivosti materialnih modelov s von Misesovo funkcijo tečenja. Tovrstni modeli se namreč običajno uporabljajo za numerične simulacije kovinskih materialov. Namen preizkusov je bil preveriti sporočilo, omenjeno v prvem odstavku uvodnega razdelka, tj., da mnogi numerični algoritmi ne izpolnjujejo osnovnega pogoja plastične nestisljivosti in da se zato volumen končnih elementov računskih modelov v področju velikih plastičnih deformacij plastično zmanjšuje ne glede na predznak vzbujene hidrostatične napetosti.

V to preiskavo je bilo vključenih pet algoritmov, in sicer trije, ki so predstavljeni v prejšnjem razdelku, nato algoritem, ki ga uporablja program ABAQUS/Standard za modeliranje elasto-plastičnih kovinskih materialov v območju velikih deformacij, in algoritem, ki temelji na neobjektivno diskretiziranih konstitutivnih enačbah. Slednji je bil namreč zasnovan za primer splošne nerazdvojene hiperelastične energijske funkcije W in sicer na osnovi aproksimirane enačbe pravila tečenja, diskretizirane po Eulerjevi implicitni metodi (glej enačbi (23a) ali (24a)), brez upoštevanja dodatne vezne enačbe (23b ali c) ali (24d), ki dopolnjuje omenjeno diskretizacijo pravila tečenja. Torej, omenjeni t.i. neustrezni algoritem uporablja pri izračunu napetosti hiperelastično deformacijsko funkcijo v nerazdvojeni obliki, (glej npr. (Korelc, 2002)):

$$W(\mathbf{b}_e) = \frac{\lambda}{2} (J_e - 1)^2 + \mu \left(\frac{1}{2} (\text{tr}[\mathbf{b}_e] - 3) - \ln J_e \right), \quad J_e = \sqrt{\det[\mathbf{b}_e]}, \quad (45)$$

pri izračunu spremenljivke \mathbf{b}_e pa ne upošteva dodatne vezne enačbe (24d). Možna je seveda tudi drugačna razlaga neustreznosti tega algoritma.

Kot je omenjeno v podrazdelku 3.2 (glej komentar nad en. (29)), je izpolnitev dodatne vezne enačbe obvezna v primeru, ko je sferična komponenta napetostnega tenzorja funkcija tako determinante J_e , kot

tudi sledi $\text{tr}(\mathbf{b}_e)$. Tak primer nastopi prav pri uporabi funkcijskega nastavka (45). O tem se lahko prepričamo, če izpeljemo izraze za Kirchhoffov ali Cauchyjev napetostni tenzor, $\boldsymbol{\tau}$ oz. $\boldsymbol{\sigma}$. Za ta namen vstavimo funkcijo (45) v definicijo (2a) in upoštevajmo $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$. Tako dobimo

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda (J_e^2 - J_e) \mathbf{1} + \mu (\mathbf{b}_e - \mathbf{1}), \quad \text{ali} \quad \boldsymbol{\tau} = \tau_o \mathbf{1} + \text{dev}[\boldsymbol{\tau}], \quad (46a, b)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \boldsymbol{\tau} = p \mathbf{1} + \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}]. \quad (46c)$$

kjer sta oba napetostna tenzorja, $\boldsymbol{\tau}$ in $\boldsymbol{\sigma}$, aditivno razdeljena na sferični in deviatorski del, tj.:

$$\tau_o = Jp = \lambda (J_e^2 - J_e) + \mu \left(\frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{b}_e] - 1 \right), \quad (47a)$$

$$\text{dev}[\boldsymbol{\tau}] = J \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}] = \mu (\mathbf{b}_e - \frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \mathbf{1}) = \mu \text{dev}[\mathbf{b}_e]. \quad (47b)$$

Iz prve enačbe je torej razvidna odvisnost sferične komponente τ_o od spremenljivke J_e in $\text{tr}(\mathbf{b}_e)$.

Preizkus objektivnosti algoritmov numerične integracije konstitutivnih zvez je bil izvršen na modelu kvadra s pomočjo komercialnega programa ABAQUS/Standard, v katerega smo preko uporabniškega podprograma UMAT vnesli 4 različne algoritme. Tako smo skupaj z originalnim algoritmom ABAQUS-a opravili preizkus na petih algoritmih, in sicer:

- 0) Algoritem ABAQUSa (metal plasticity model po (ABAQUS, 2004)).
- 1) Algoritem I po (Simo, 1988), ki temelji na razdvojeni deformacijski funkciji in poenostavljenem izračunu volumensko nevtralizirane spremenljivke $\bar{\mathbf{b}}_e$ (glej podrazdelek 3.2 in točko 6 v preglednici 2).
- 2) Eksponentni algoritem po (Simo, 1992a), katerega zasnova je bila predstavljena v podrazdelku 3.3.

- 3) Različica algoritma I po (Simo, 1992b), ki je bila razvita za nerazdvojeno hiperelastično funkcijo oblike (45) in ki uporablja pravilen izračun spremenljivke $\bar{\mathbf{b}}_e$ oz. \mathbf{b}_e (glej enačbi (29) in (30) v podrazdelku 3.2).
- 4) Algoritem, izpeljan na osnovi neustrezno diskretiziranih konstitutivnih enačb. Algoritem upošteva nerazdvojeno hiperelastično funkcijo oblike (45) in diskretizirano pravilo tečenja (23a) ali (24a), ne upošteva pa dodatne vezne enačbe (23b ali c) ali (24d).

Kot zanimivost naj omenimo, da je pri 3. in 4. algoritmu za razliko od 1. in 2. matrika diskretnih elasto-plastičnih modulov nesimetrična. To je posledica uporabljene nerazdvojene elastične energijske funkcije oblike (45).

Računski model je z materialnimi podatki in načinom obremenjevanja prikazan na sliki 1. Model je podprt in obremenjen tako, da je bilo v njem doseženo homogeno enoosno napetostno stanje z edino komponento vzporedno daljši stranici kvadra. Zato je bil kvader modeliran samo z enim končnim elementom, pri čemer je bil izbran končni element C3D8, (ABAQUS, 2004). Izračuni so bili izvršeni tudi z drugimi tipi osem vozliščnih tridimenzionalnih končnih elementov, vendar so tu podani rezultati samo za navedeni element.

Kvader je bil vzdolž daljše stranice izpostavljen cikličnemu raztegovanju in tlačanju do največje deformacije $\varepsilon_h = \pm 50\%$. Začetna višina kvadra $h = 2$ je bila torej spreminjana med mejnima vrednostma $h_{\max} = 3$ in $h_{\min} = 1$ z enakimi koraki deformacije, in sicer $\Delta\varepsilon_h = 2,5\%$, 5% , 10% in 25% .

Osnovni namen preizkusa je bil opazovati časovno spreminjanje volumna kvadra in morebitno spremembo njegove oblike. Ker je upoštevan elasto-plastični material brez utrjevanja s von Misesovo funkcijo tečenja, lahko v primeru 1. in 2. algoritma izračunamo mejne vrednosti prostornine deformiranega elementa po točnih formulah, za ostale algoritme (0., 3. in 4.) pa lahko mejne vrednosti, zaradi majhnih elastičnih deformacij, ocenimo s pomočjo fizikalno utemeljene formule. Torej (številčne vrednosti za Y , E , ν in začetni volumen kvadra V , ki so uporabljene spodaj, so podane na sliki 1):

ad. 1. algoritem (sferično komponento napetostnega tenzorja $\boldsymbol{\tau}$ glej preglednico 1, tč. 2):

$$\tau_o = \pm \frac{1}{3} Y, \quad \tau_o = \frac{1}{2} \kappa (J_e^2 - 1), \quad J_e = \frac{v(t)}{V}, \quad \kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (48a-d)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_{\max} \\ v_{\min} \end{bmatrix} = V \sqrt{1 \pm 2Y(1-2\nu)/E} = \begin{bmatrix} 2.00079984 \\ 1.99919984 \end{bmatrix}. \quad (48e)$$

ad. 2. algoritem: elastična funkcija $W(\mathbf{b}_e)$ in definicija sferične komponente Kirchhoffovega napetostnega tenzorja sta povzeti po (Simo, 1992a):

$$W(\mathbf{b}_e) = \frac{1}{2} \lambda (\ln J_e)^2 + \mu [(\varepsilon_1^e)^2 + (\varepsilon_2^e)^2 + (\varepsilon_3^e)^2] = \frac{1}{2} \kappa (\ln J_e)^2 + \mu \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \quad (49a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \{\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e\} = \{\ln \lambda_1^e, \ln \lambda_2^e, \ln \lambda_3^e\}, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = J_e^{-1/3} \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (49b,c)$$

$$\tau_o = \kappa \ln J_e, \quad \tau_o = \pm \frac{1}{3} Y \quad (50)$$

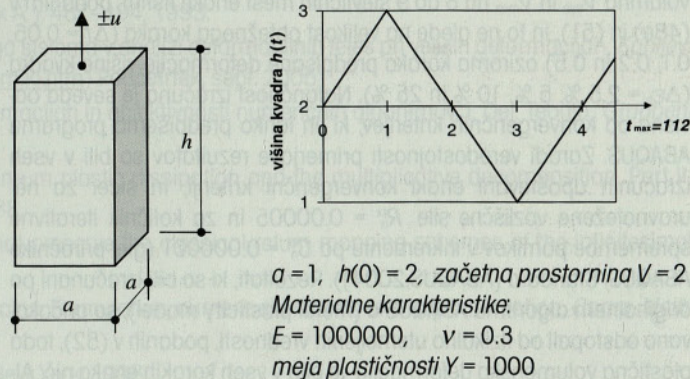
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_{\max} \\ v_{\min} \end{bmatrix} = V \exp(\pm Y(1-2\nu)/E) = \begin{bmatrix} 2.00080016 \\ 1.99920016 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Za preverjanje 0., 3., in 4. algoritma uporabimo fizikalno utemeljeno zvezo med volumensko specifično deformacijo ε_v , (20a), in sferično komponento Cauchyjevga napetostnega tenzorja p (tj. negativnim pritiskom), torej:

$$\varepsilon_v = (v - V)/V = p/\kappa, \quad p = \pm \frac{1}{3} Y \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} v_{\max} \\ v_{\min} \end{bmatrix} = V [1 \pm Y(1-2\nu)/E] = \begin{bmatrix} 2.0008 \\ 1.9992 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

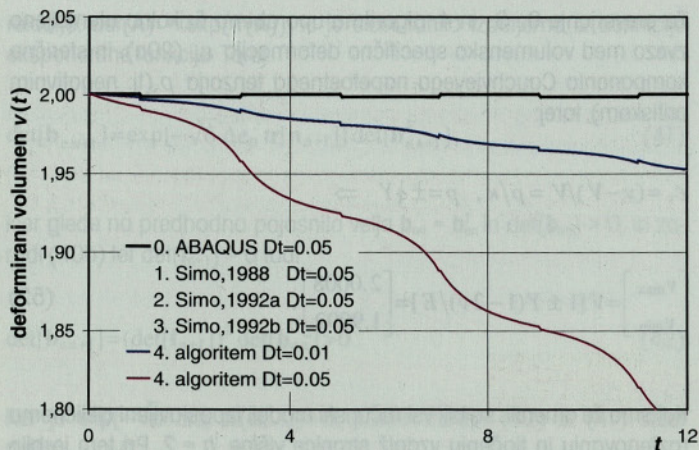
Kot smo že omenili, so bili vsi računski modeli izpostavljeni cikličnemu raztegovanju in tlačanju vzdolž stranice višine $h = 2$. Pri tem je bilo upoštevano 28 ciklov, pri čemer je bil en cikel dosežen v 4 kvazičasovnih enotah (glej sliko 1).



Slika 1 • Geometrija, materialne karakteristike in obtežni diagram testnih modelov

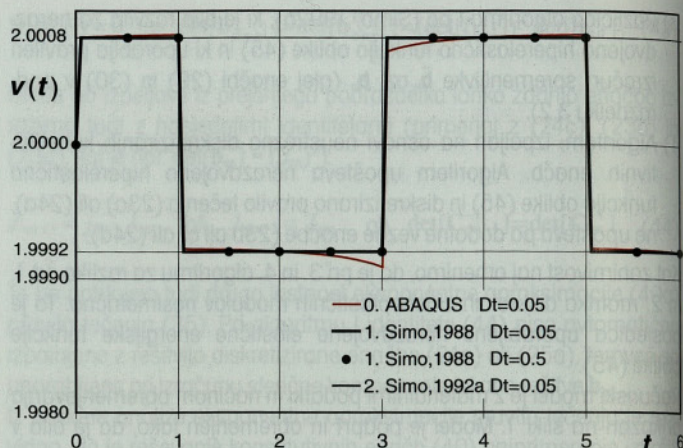
4.2 Pregled rezultatov

Rezultati spreminjanja volumna kvadra vzdolž časovnega/obtežnega parametra t so za vseh pet algoritmov prikazani v diagramih na sliki 2, detajl nekaterih od teh diagramov pa na sliki 3. Na sliki 2 so prikazani rezultati samo za prve tri cikle, saj se stanje pri vseh nadaljnjih ciklih ponavlja, razen za 4. algoritem, pri katerem se volumen elementa nelinearno zmanjšuje ne glede na predznak hidrostatične napetosti. Pri tem algoritmu, ki temelji na neustrezni diskretizaciji konstitutivnih enačb, lahko iz diagramov opazimo, da se hitrost manjšanja volumna povečuje z velikostjo obtežnega/časovnega koraka. Pri koraku $\Delta t = 0,05$ ($\Delta\varepsilon_h = 2,5\%$) se je na primer po 28 ciklih volumen kvadra zmanjšal na vrednost $v_{(t=112)} = 0.12157$ (pravilno bi bilo $v_{(t=112)} = V = 2$), pri koraku $\Delta t = 0,2$ ($\Delta\varepsilon_h = 10\%$) pa je skoraj izginit, saj je bila dosežena vrednost samo $v_{(t=112)} = 0.00001658$. Pri vseh ostalih algoritmihih se je volumen kvadra spreminjal v pričakovanih mejah v_{\max} in v_{\min} , ki smo jih določili v prejšnjem podrazdelku (glej en. (48e), (51) in (52)), in sicer na celotnem kvazičasovnem območju $t \in (0, 112)$ oziroma v vseh 28 obtežnih ciklihih.



Slika 2 • Časovni diagrami deformiranega volumna preizkusnega kvadra

Pri 1. in 2. algoritmu, ki sta bila izpeljana po virih (Simo,1988) in (Simo,1992a), so bile izračunane mejne vrednosti deformiranega volumna v_{min} in v_{max} na 8 do 9 številčnih mest enake tistim, podanim v (48e) in (51), in to ne glede na velikost obtežnega koraka ($\Delta t = 0.05, 0.1, 0.2$ in 0.5) oziroma koraka predpisane deformacije višine kvadra ($\Delta \epsilon_n = 2.5\%, 5\%, 10\%$ in 25%). Natančnost izračuna je seveda odvisna od konvergenčnih kriterijev, ki jih lahko predpišemo programu ABAQUS. Zaradi verodostojnosti primerjave rezultatov so bili v vseh izračunih upoštevani enaki konvergenčni kriteriji, in sicer za neuravnotežene vozliščne sile $R_n^{\alpha} = 0.00005$ in za količnik iterativne spremembe pomikov v inkrementu pa $C_n^{\alpha} = 0.000001$ (glej priložnike ABAQUS/Standard (ABAQUS,2004)). Rezultati, ki so bili izračunani po originalnem algoritmu ABAQUS-a (metal plasticity model), so pričakovano odstopali od fizikalno utemeljenih vrednosti, podanih v (52), toda plastična volumenska deformacija je bila v vseh korakih enaka nič. Algoritem ABAQUS-a temelji namreč na majhnih elastičnih deformacijah in temu ustrezno aproksimiranih izrazih za elastične deformacijske tenzorje (glej razdelek 2). Volumenska deformacija je na primer definirana s prvo invarianto tenzorja specifičnih deformacij, tj. $\text{tr}(\mathbf{a}_e)$, in ne s funkcijo tretje invariante tenzorja \mathbf{b}_e , tj. $\epsilon_v = \sqrt{\det(\mathbf{b}_e)} - 1$. Razlike v izračunu deformiranega volumna po originalnem algoritmu ABAQUS-a glede na vrednosti iz (52) so opazne na sliki 3, kjer so krivulje $v(t)$ prikazane v večjem merilu.



Slika 3 • Detajli časovnega diagrama iz slike 2 (kvazičasovna enota $t = 1$ ustreza 50 % deformaciji začetne višine kvadra, in sicer izmenično: nateg, flak, flak, nateg, itd.)

Pri 3. algoritmu so bile dobljene mejne vrednosti volumna v_{min} in v_{max} , ki so na 7 do 8 številčnih mest enake tistim, ki so podane v (48e) za primer 1. algoritma. To ujemanje lahko pripišemo linearnosti elastičnega odziva zaradi majhnih totalnih elastičnih deformacij. Pri obeh algoritmih so bili materialni moduli λ in μ oziroma κ in λ izračunani iz istih konstant, E in ν , po obrzcih znanih iz linearne teorije. Samo zaradi informacije naj za konec tega razdelka navedemo, da se je 1. algoritem, ki je bil objavljen v (Simo,1988), v primerjavi z originalnim algoritmom programskega sistema ABAQUS izkazal tudi po manjši porabi računalniškega časa. Za analizo računskega modela lokalne zožitve natezne palice pravokotnega preseka, sestavljenega iz ca. 700 končnih elementov, je porabil približno 50 % manj računalniškega časa kot originalni ABAQUS-ov algoritem. Oba izračuna sta bila pri tem izvedena pod enakimi pogoji.

5 • SKLEP

V prispevku je bila izvršena analiza objektivnosti računskih algoritmov, ki temeljijo na multiplikativni elasto-plastični teoriji, in sicer glede izpolnjevanja nestisljivosti plastičnega dela deformacij v primeru uporabljenih von Misesove funkcije tečenja. Preverjeni so bili štiri algoritmi: dva, ki ju je Simo objavil v (Simo,1988) in (Simo,1992a), nato različica algoritma iz (Simo,1992b), istega avtorja, in sicer za nerazdvojeno hiperelastično deformacijsko funkcijo npr. oblike (45) in algoritem, ki je bil izpeljan na osnovi neustrezno diskretiziranih konstitutivnih enačb za primer iste oblike hiperelastične deformacijske funkcije. Tem je bilo dodano še preverjanje algoritma, ki ga uporablja komercialni program ABAQUS/Standard za simulacijo kovinskih materialov (metal plasticity model).

Pokazali smo, da vsi algoritmi Sima v celoti izpolnjujejo zahtevani pogoji o nestisljivosti plastičnih deformacij. Glede numerične stabilnosti in natančnosti sta prva dva, po (Simo,1988) in (Simo,1992a), nekoliko učinkovitejša od ustrezno prirejene različice po (Simo,1992b) in originalnega algoritma programskega sistema ABAQUS/Standard (ABAQUS,2004). Preizkus objektivnosti glede plastične nestisljivosti je zadovoljivo prestal tudi slednji algoritem, in to kljub dejstvu, da je zasnovan na nekaterih lineariziranih izrazih elastičnega dela deformacij. Pri vseh naštetih algoritmih nismo zasledili fenomena zmanjševanja volumna končnih elementov, ki smo ga omenili v uvodnem razdelku. Vsi temeljijo na objektivno diskretiziranih konstitutivnih enačbah, način

diskretizacije pa je seveda med njimi različen. Edini, ki je podvržen temu fenomenu, je algoritem, ki temelji na neustrezni diskretizaciji konstitutivnih enačb. V prispevku je bil neustrezen način diskretizacije izbran predvsem zaradi predstavitve omenjenega nezaželenega fenomena, najdemo pa ga lahko tudi v literaturi. Ta algoritem je bil namreč zasnovan na nerazdvojeni hiperelastični deformacijski funkciji in po Eulerjevi implicitni metodi diskretizirani enačbi pravila tečenja brez upoštevanja dodatne vezne enačbe, ki dopolnjuje omenjeno diskretizacijo pravila tečenja.

Torej splošna trditev, ki jo lahko izluščimo iz vesti, zapisane v uvodnem razdelku, tj., da se pri mnogih algoritmičnih volumen končnih elementov pri cikličnem obremenjevanju računskih modelov stalno plastično zmanjšuje, drži samo za tiste algoritme, ki temeljijo na nekonsistentno diskretiziranih zveznih konstitutivnih enačbah. Izpeljava takih algoritmov pa je lahko posledica površnega razumevanja teorije in fizikalno-matematičnega pomena vseh vpletenih veličin v primeru velikih deformacij.

6 • LITERATURA

- ABAQUS, Inc., ABAQUS/Standard, Version 6.5, ABAQUS, Inc. J., USA, 2004.
- Fung, J., C., Foundations of Solid Mechanics. *Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New York*, 1965.
- Gurtin, M., E., An Introduction to Continuum Mechanics, *Academic Press, New York*, 1981.
- Korelc, J., Multi-language and multi-environment generation of nonlinear finite element codes, *Engineering with Computers*, 18, 312–327, 2002.
- Rojc, T., A numerical method for the solution of the large strain elastoplastic problems, *Proceedings, Internat. Conf. Design to Manufacture in Modern Industry DMMI'93*, Bled, Slovenia, 7–9 June 1993. (Ed. Jezernik A.), 487–494, 1993.
- Rojc, T. (avtor), Štok, B., Dva pristopa k uporabi konvektnega koordinatnega sistema v analizi deformabilnih teles pri velikih deformacijah, *Kuhljevi dnevi 05, SDM*, (razširjeni članek: <http://www.km.fgg.uni-lj.si/sdm/zborniki.htm>) Podčetrtek, sept. 2005.
- Rojc, T., O multiplikativni teoriji hiperelasto-plastičnih teles pri velikih deformacijah in objektivnosti numeričnih algoritmov. I. Del: Teorija, *Gradbeni vestnik*, letnik 56, februar, 31–44, 2007.
- Simo, J., C., A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part II. Computational aspects, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 68, 1–31, 1988.
- Simo, J., C., Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 69, 61–112, 1992a.
- Simo, J., C. and Miehe, C., Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 98, 41–104, 1992b.
- Simo, J., C.) Hughes, T., J., R., Computational Inelasticity, *Springer-Verlag, New York*, 1998.
- Vidav, I., Višja matematika III. *DZS, Ljubljana*, 1976.

Popravek enačbe (35) v prvem delu članka (Rojc, 2007):

Namesto:

$$\begin{aligned} d\Psi/dt &= \partial_{\mathbf{b}_e} \Psi : [\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}_e + \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{1}^T + \mathbf{L}_v \mathbf{b}_e] + \dot{\mathbf{E}} \\ &= (2\partial_{\mathbf{b}_e} \Psi \cdot \mathbf{b}_e) : [\mathbf{1} + \frac{1}{2} \mathbf{L}_v \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{b}_e^{-1}] + \dot{\mathbf{E}}, \end{aligned}$$

mora biti:

$$\begin{aligned} d\Psi/dt &= \partial_{\mathbf{b}_e} \Psi : [\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}_e + \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{1}^T + \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e] + \dot{\mathbf{E}} \\ &= (2\partial_{\mathbf{b}_e} \Psi \cdot \mathbf{b}_e) : [\mathbf{1} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{b}_e^{-1}] + \dot{\mathbf{E}}, \end{aligned}$$

PONUDBA ZA OGLAŠEVANJE V GRADBENEM VESTNIKU

GRADBENI VESTNIK je strokovno-znanstvena revija, s katero predstavljamo slovenski in tuji strokovni javnosti dosežke z vseh področij gradbeništva. Revija je tudi člansko glasilo Zveze društev gradbenih inženirjev in tehnikov Slovenije ter Matične sekcije gradbenih inženirjev Inženirske zbornice Slovenije. Revija izhaja mesečno (zadnje dni v mesecu) v nakladi 3000 izvodov. Med naročniki je tudi 52 naslovov iz tujine, z nekaterimi tujimi naslovi pa si revijo izmenjujemo.

Za oglase se priporočamo po naslednjem ceniku:

Ovitek: zadnja stran 1/1	834,59 EUR
Notranja stran 1/1	625,94 EUR
Notranja stran 2/3	542,48 EUR
Notranja stran 1/2	417,29 EUR
Notranja stran 1/3	312,97 EUR
Notranja stran 1/4	166,92 EUR

V cenah ni upoštevan 20 % DDV.

Za prvo ponovitev oglasa upoštevamo 20 % popust, za drugo ponovitev pa 40 %.

Oglas lahko oddate kot:

- rastrski format JPEG, TIFF, EPS
- CDR (ver. 8.0 ali manj), pri čemer je potrebno vse črke spremeniti v krivulje.

Vsebine je mogoče poslati z redno pošto na naslov: GRADBENI VESTNIK, Leskoškova 9E, 1000 Ljubljana ali po e-pošti na naslednji naslov:

- gradb.zveza@siol.net

Gradivo pričakujemo do 1. dneva v vsakem mesecu!

Z Vašim sodelovanjem boste omogočili, da revija še naprej nemoteno in redno izhaja.

ZDGITS – izdajateljica
GRADBENEGA VESTNIKA

NOVI DIPLOMANTI

UNIVERZA V LJUBLJANI, FAKULTETA ZA GRADBENIŠTVO IN GEODEZIJO

VISOKOŠOLSKI STROKOVNI ŠTUDIJ GRADBENIŠTVA

Sabina Vučemilović, Izhodišča za trženje nepremičnin v lasti Holdinga Slovenske železnice d.o.o. in javne železniške infrastrukture v lasti Republike Slovenije na območju železniškega omrežja SV Slovenije, mentor izr. prof. dr. Maruška Šubic Kovač

Erik Krašna, Stroškovna analiza izbire gradbenih materialov pri gradnji stanovanjskega objekta, mentor doc. dr. Jana Šelih

Igor Bertok, Denitrifikacija pitnih vod, mentor izr. prof. dr. Boris Kompare

UNIVERZITETNI ŠTUDIJ GRADBENIŠTVA

Aljaž Hude, Vpliv odsevnosti prometnih znakov na prometno varnost, mentor doc. dr. Alojzij Juvanc, somentor asist. mag. Robert Rijavec

Zoran Marić, Analiza procesa graditve nadvoza čez železniško progo, mentor doc. dr. Jana Šelih

Dejan Rep, Uporaba programa SWMM in smernic ATV 128 za dimenzioniranje kanalizacijskih sistemov in zadrževalnih bazenov, mentor izr. prof. dr. Jože Panjan

Primož Kozlevčar, Potresna analiza visokoregalnih skladišč, mentor prof. dr. Darko Beg, somentor dr. Leon Hladnik

Franc Kralj, Potresna analiza jeklene stolpnice, mentor prof. dr. Darko Beg

Anka Ilc, Projektiranje armiranobetonskih sten po EC8 in JUS ter kritična ocena njihovega obnašanja pri potresni obtežbi, mentor prof. dr. Matej Fischinger, somentor izr. prof. dr. Tatjana Isakovič

UNIVERZITETNI ŠTUDIJ VODARSTVO IN KOMUNALNO INŽENIRSTVO

Jernej Kandus, Meritve na hidravličnem modelu z uporabo merilnega mostu, mentor prof. dr. Franc Steinman

UNIVERZA V MARIBORU, FAKULTETA ZA GRADBENIŠTVO

VISOKOŠOLSKI STROKOVNI ŠTUDIJ GRADBENIŠTVA

Urša Rebernak, Kontrola modula elastičnosti betona z dodatkom mlete gume, mentor pred. Samo Lubej, somentor mag. Andrej Ivanič

UNIVERZITETNI ŠTUDIJ GRADBENIŠTVA

Dušan Cmok, Izgradnja viadukta rondo z metodo postopnega narivanja, mentor doc. dr. Andrej Štrukelj, somentor Nataša Šuman, univ. dipl. gosp. inž.

Aleš Urleb, Vpliv premikov v prelomni coni na napetostno deformacijsko stanje cevovoda čez Kozjak, mentor izr. prof. dr. Bojan Žlender, somentor mag. Borut Macuh

DOKTORSKI ŠTUDIJ GRADBENIŠTVA

Aleš Magdič, Dinamični informacijsko komunikacijski sistem za učinkovitejše obvladovanje nepredvidenih dogodkov v procesu gradnje gradbenega objekta, mentor red. prof. dr. Danijel Rebolj

Rubriko ureja • **Jan Kristijan Juteršek**, univ. dipl. inž. grad.

KOLEDAR PRIREDITEV

marec / april 2007

Simpozij na temo geodetskih načrtov (MSGeo)

IZS, Ljubljana, Slovenija
www.izs.si

april 2007

Štiridnevno izobraževanje o Evrokodih v Ljubljani

IZS, Ljubljana, Slovenija
www.izs.si

april 2007

Štiridnevno izobraževanje o Evrokodih v Mariboru

Maribor, Slovenija
www.izs.si

druga polovica aprila 2007

Strokovna ekskurzija »Most Črni baron« in AC odseki od Maribora do Lendave

IZS, Ljubljana, Slovenija
www.izs.si

5.4.2007

Strelovodna zaščita

IZS, Ljubljana, Slovenija
www.izs.si

17.4.2007

Toplotne črpalke

IZS, Ljubljana, Slovenija
www.izs.si

19.-20.4.2007

Deutscher Bautechnik – TAG 2007

Mainz, Nemčija
www.bautechniktag.de

23.-29.4.2007

BAUMA 2007

28. Internationale Fachmesse für Baumaschinen, Baustoffmaschinen, Bergbaumaschinen, Baufahrzeuge und Baugeräte
München, Nemčija
www.bauma.de

maj 2007

SIST EN 206

IZS, Ljubljana, Slovenija
www.izs.si

9.-10.5.2007

Četrta konferenca CGS 2007

Hotel Mons, Ljubljana

11.5.2007

Geodetski načrti in gospodarska javna infrastruktura

IZS, Ljubljana, Slovenija
www.izs.si

junij 2007

Sodobni kanalizacijski sistemi

IZS, Ljubljana, Slovenija
www.izs.si

junij 2007

>>Cvetka digitalnih katastrskih načrtov<<

IZS, Ljubljana, Slovenija
www.izs.si

11.-13.6.2007

International Conference: Sustainable Construction Materials and Technologies

Coventry, Anglija
www.uwm.edu/dept/cbu/coventry.html

18.-20.6.2007

6th ITS in Europe Congress and Exhibition

Aalborg, Danska
www.ertico.com

26.-29.6.2007

24th W78 Conference & 5th ITCEDU Workshop & 14th EG-ICE Workshop

Maribor, Slovenija
www.w78.uni-mb.si

4.-6.9.2007

7th International Congress Concrete: Construction's Sustainable Option

Dundee, Škotska
www.ctucongress.co.uk

18.-21.9.2007

The Eleventh International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing

St Julians, Malta
www.civil-comp.com/conf/or/contact

19.-21.9.2007

IABSE Symposium

International Association for Bridge and Structural Engineering

Weimar, Nemčija
www.iabse2007.de

24.-27.9.2007

14th European Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering: Geotechnical Engineering in Urban Environments

Madrid, Španija
www.ecsmge2007.org

6.-10.10.2007

75th IBTTA Annual Meeting and Exposition

Dunaj, Avstrija
www.ibtta.org

10.-13.12.2007

7th International Symposium on Cable Dynamics

Dunaj, Avstrija
www.aimontefiore.org/cable/

30.6.-4.7.2008

10th International Symposium on Landslides and Engineered Slopes

Xi'an, Kitajska
www.landslide.iwhr.com

5.-9.10.2009

17th International Conference for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering

Alexandria, Egipt
www.2009icsmge-egypt.org

Rubriko ureja • Jan Kristijan Juteršek, ki sprejema predloge
za objavo na e-naslov: msg@izs.si