

# Dvakrat skoraj $2^n$



TEREZIJA KREČIČ IN PIJA KAPŠ

→ Bi znali nadaljevati zaporedje 2, 4, 8, ...? Če ste kot odgovor podali geometrijsko zaporedje potenc števila 2, to seveda ni edina rešitev. Rešitev je tudi zaporedje, kjer se razdalja med sosednjima členoma povečuje za 2 (2, 4, 8, 14, 22, 32, ...); po navljajoče se zaporedje 2, 4, 8, 2, 4, 8, 2, ...; naključno zaporedje 2, 4, 8, 15, -3, ...; in še bi lahko naštevati – v resnici je rešitev neskončno.

Res je, da se potence števila 2 pogosto pojavljajo pri številnih problemih, vendar nas lahko včasih prehitro sklepanje tudi zavede. Predstavili bomo dva problema, pri katerih nas nekaj začetnih členov hitro napelje na splošno formulo. Toda v enem primeru se sklepanje izkaže za pravilno, v drugem pa ne, zato moramo biti pri delanju zaključkov pozorni, da vedno preverimo, ali naše domneve držijo tudi na splošno.

## 1. Število potez za premik hanojskega stolpa

Začnimo z legendo: V nekem indijskem mestu stoji velik tempelj. Pod njegovo kupolo je bronasta plošča, na kateri stojijo tri diamantne igle. Na eno teh igel je bilo ob nastanku sveta položenih – od največjega na dnu do najmanjšega na vrhu – 64 obročev iz čistega zlata. Brahmani, menihi hindujskega božanstva Brahme, dan in noč neutrudno predstavljajo obroč z ene igle na drugo po naslednjih dveh pravilih: (1) **premakne se lahko po en obroč naenkrat** in (2) **večji obroč ne sme biti položen čez manjšega**. Ko bodo vsi obroči v celoti prestavljeni na tretjo iglo, bo po starodavnem izročilu nastopil konec sveta. Le kdaj se bo to zgodilo?

Problem je zelo znan in ste ga bralci verjetno že srečali ali pa ga celo imate v svoji škatli z igračami. To zanimivo matematično sestavljanke je leta 1883 izumil francoski matematik Édouard Lucas in jo poimenoval *hanojski stolpi*<sup>1</sup>. Obstaja še več drugih poimenovanj, na primer *brahmanski stolpi* (po božanstvu iz legende). Ni pa znano, ali si je avtor sam izmislil legendo ali ga je le navdahnila.



SLIKA 1.

Radi bi izračunali, kdaj bi po legendi nastopil konec sveta. Recimo, da menihi za vsako potezo potrebujejo eno sekundo. Zdaj moramo izračunati še število potez za premik stolpa iz 64 obročev. Pa začnimo z manjšim številom obročev, ki ga označimo z  $n$ , in si oglejmo sliko 2:

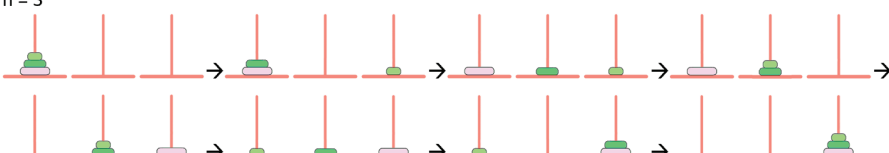
Pri  $n = 3$  lahko že opazimo vzorec:

1. na srednjo palico premaknemo stolp iz vrhnjih dveh obročev (za kar potrebujemo število potez pri  $n = 2$ , torej tri),

<sup>1</sup>Hanoj je glavno mesto Vitenama, blizu katerega dejansko obstaja starodavna razvalina nekega budističnega svetišča.





|                                                                                                               | število<br>potez |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| <div><div>n = 1</div></div>  | 1                |
| <div><div>n = 2</div></div> | 3                |
| <div><div>n = 3</div></div> | 7                |

SLIKA 2.  
Najmanjše število potez za 1, 2 in 3 ploščice.

2. največji obroč premaknemo na tretjo palico (ena poteza)
3. spet premaknemo stolp iz manjših dveh obročev, tokrat na tretjo palico (zopet tri poteze za  $n = 2$ )

Skupaj res opravimo  $3 + 1 + 3 = 7$  potez.

Zapišimo še vzorec z oznakami za splošni  $n$ . Naj bo  $S_n$  **najmanjše število potez, potrebnih za premik hanojskega stolpa iz  $n$  obročev**. Kot prej opazimo, da stolp iz  $n$  obročev premaknemo tako, da najprej vrhnji stolp iz  $n - 1$  obročev premaknemo na srednjo palico, nato največji obroč na tretjo, čezenj pa zopet stolp iz srednje palice (gl. sliko 3).

Dobimo rekurzivno formulo  $S_n = 2S_{n-1} + 1$  pri

čemer je  $S_1 = 1$ . Izrazimo še eksplicitno formulo:

■  $S_n = 2S_{n-1} + 1 =$

$= 2(2S_{n-2} + 1) + 1 = 2^2S_{n-2} + 2 + 1 =$

$= 2^2(2S_{n-3} + 1) + 2 + 1 =$

$= 2^3S_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 =$

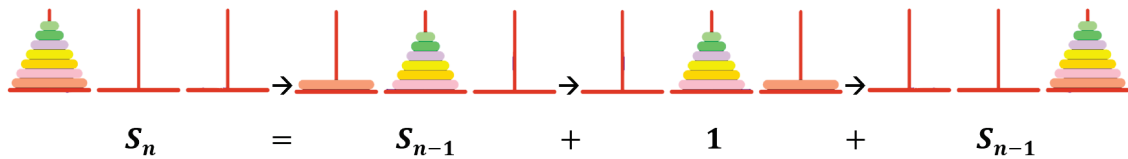
$= \dots =$

$= 2^{n-1}S_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + 2 + 1 =$

$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2 + 1 =$

$= 2^n - 1$

Z dobljeno formulo sedaj izračun, koliko časa se premika 64 obročev (ena sekunda na premik), prepusimo bralcu. Za ovrednotenje rezultata dodajmo podatek, da je Zemlja stara približno 4,5 milijard



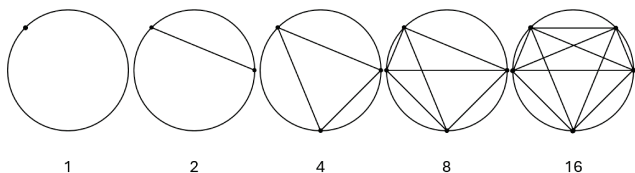
SLIKA 3.  
Najmanjše število potez za  $n$  obročev.

let, vesolje pa 13,8 milijard let. Poleg tega ima naše Sonce še približno 5 milijarde let življenjske dobe.

Za konec še opozorilo: kljub lahkemu izračunu najmanjšega števila potez pa samo premikanje pri večjem številu obročev ni enostavno in zahteva več koncentracije. Bralcu prepuščamo tudi premislek, na katero palico je treba postaviti najmanjši obroč, da bo končni stolp res stal na tretji palici.

## 2. Moserjev problem delitve kroga

Imejmo krožnico, na katero na poljubnem mestu postavimo točko. Krog je ostal cel, nerazdeljen. Na krožnico dodamo še eno točko ter jo povežemo s prejšnjo, kot je prikazano na spodnji sliki 4. Krog smo s tem razdelili na dva dela oziroma na dve območji. Dodamo še tretjo točko in ju povežemo s prejšnjima. Tako dobimo krog, ki je razdeljen na štiri območja. Postopno dodajamo točke in jih povezujemo z vsemi prejšnjimi. Zanima nas, koliko območij največ lahko dobimo, ko je na krožnici  $n$  točk. Ta problem iskanja števila območij v odvisnosti od števila točk na krožnici imenujemo tudi *Moserjev problem delitve kroga*. Poglejmo si, kaj se zgodi, ko dodamo še četrto in peto točko. Ko dodamo četrto točko, dobimo osem območij, ko dodamo peto točko pa 16 območij.

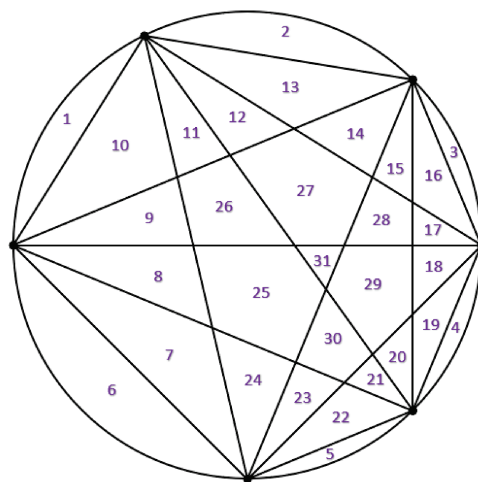


SLIKA 4.

Število območij pri delitvi kroga z 1, 2, 3, 4 oz. 5 točkami na krožnici.

Iz prvih petih primerov bi lahko sklepali, da je zaporednje števila območij, ki jih dobimo, če na krožnico dodajamo točke in jih povežemo s prejšnjimi, enako zaporedju z eksplisitno formulo  $a_n = 2^{n-1}$ . Preverimo dobljeno eksplisitno formulo še na primeru s šestimi točkami. Po formuli bi morali dobiti 32 območij, saj je  $a_6 = 2^5 = 32$ . Če se malo po-

trudimo in res dodamo šesto točko, jo povežemo z vsemi preostalimi in preštejemo dobljena območja, kot je prikazano na sliki 5, opazimo, da smo dobili le 31 območij. Očitno smo iz začetnih petih členov prehitro sklepali na lastnosti zaporedja.



SLIKA 5.

Primer s šestimi točkami.

Poskusimo sedaj poiskati pravilno eksplisitno formulo, ki bi nam povedala, koliko območij dobimo, ko imamo na krožnici razporejenih  $n$  točk. Na tem mestu moramo le opozoriti, da razporeditev točk na krožnici ni popolnoma poljubna. Neustrezna je vsaka razporeditev točk, ki privede do situacije, ko se tri ali več kot tri, daljice sekajo v isti točki. To se zgodi le v redkem primeru, ko so točke na krožnici razporejene preveč simetrično, kar lahko preprečimo z naključnim razporejanjem točk na krožnico.

Ker z naraščanjem  $n$ -ja čedalje težje razporejamo točke na krožnico in štejemo območja, bomo poskusili prešteti kaj drugega, kar nam bo morda pomagalo pri določanju števila območij. Na primerih, ki smo jih že narisali, preštejemo, koliko daljic smo narisali pri posameznem primeru ter v koliko presečiščih znotraj kroga se te daljice sekajo. Preštete vrednosti vpišemo v tabelo 1.

Morda bi daljice in presečišča znali prešteti tudi v





| število točk | število daljic | število presečišč | število območij |
|--------------|----------------|-------------------|-----------------|
| 1            | 0              | 0                 | 1               |
| 2            | 1              | 0                 | 2               |
| 3            | 3              | 0                 | 4               |
| 4            | 6              | 1                 | 8               |
| 5            | 10             | 5                 | 16              |
| 6            | 15             | 15                | 31              |

TABELA 1.  
Prvih šest primerov.

splošnem primeru, ko imamo na krožnici razporejenih  $n$  točk. Vsaka daljica določa natanko en par točk na krožnici in vsak par točk določa natanko eno daljico. Iz tega sledi, da je število daljic enako številu možnih parov točk, torej  $\binom{n}{2}$ . S podobnim premislekom lahko pridemo tudi do števila presečišč. Število presečišč je enako številu možnih četveric točk med  $n$  točkami, torej  $\binom{n}{4}$ .

Razmislimo, kako bi lahko s pomočjo števila daljic in presečišč prešteli vsa območja v primeru z  $n$  točkami. Na začetku je krog sestavljen iz enega območja, ko narišemo prvo daljico, se krog razdeli na dve novi območji. Vsaka nova daljica, ki jo narišemo, razdeli eno staro območje na dve novi območji. Če nova daljica seka še kakšno drugo že narisano daljico, z vsakim takim presekom seka še eno dodatno območje, ki ga razdeli na dve novi območji. Začnemo torej z enim območjem in z vsako daljico, ki jo narišemo, dobimo novo območje. Prav tako z vsakim presečiščem dobimo novo območje. Lahko zaključimo, da je skupno število območij enako

■  $1 + \text{št. daljic} + \text{št. presečišč} =$

$$= 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} =$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} =$$

$$= \dots =$$

$$= \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$$

Namesto pričakovane eksponentne funkcije smo torej dobili polinom četrte stopnje.

Moserjev problem delitve kroga je samo eden od primerov, ki nas uči, da se pri zaporedjih ne smemo zanašati le na lastnosti začetnih členov in iz njih sklepati na lastnosti celega zaporedja. Pomembno je, da ne delamo prehitrih zaključkov in se ne zadovoljimo z opazovanjem lastnosti na večjem številu začetnih členov. Če želimo z gotovostjo trditi, da za zaporedje velja neka lastnost, je nujno, da jo dokažemo.

*Prispevek je nastal pri predmetu Matematika za nadarjene za študente programa Pedagoška matematika na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.*

Literatura

[1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Tower\\_of\\_Hanoi](https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi)

[2] [https://www.puzzlemuseum.com/month/picm07/2007-03\\_hanoi.htm](https://www.puzzlemuseum.com/month/picm07/2007-03_hanoi.htm)

[3] C. Petr, *Posplošitev klasičnega problema hanojskih stolpov*, magistrsko delo, IZUM, Maribor, 1998. Dostopno na: <http://cirilpetr.com/papers/magisterij.pdf>

[4] G. Sanderson, *Moser's circle problem*, [ogled 25. 1. 2024] dostopno na <https://www.3blue1brown.com/lessons/moser-reboot>.

