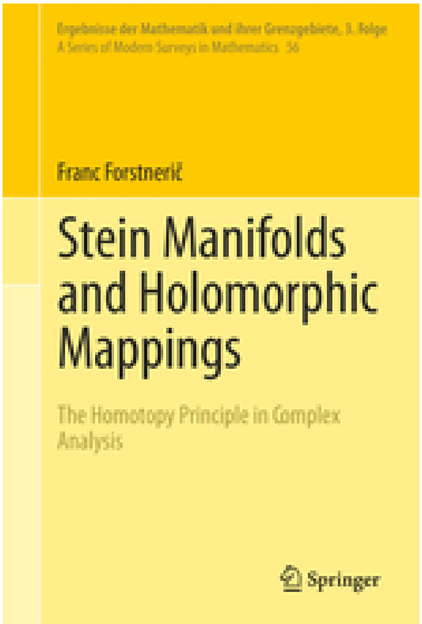
F. Forstnerič, Stein manifolds and holomorphic mappings: the homotopy principle in complex analysis, 2nd ed., Springer, Cham, 2017, 562 strani.



Pred nami je druga izdaja knjige Stein Manifolds and Holomorphic Mappings, avtorja akad. prof. dr. Franca Forstneriča. Delo je posvečeno homotopskemu principu v kompleksni analizi, ki se po pionirju moderne kompleksne analize Kiyoshiju Oka imenuje princip Oka. V grobem povedano princip Oka trdi, da imajo kohomološko formulirani analitični problemi na Steinovih mnogoterostih zgolj topološke ovire. Moderni princip Oka nadomesti kohomološko formulacijo problemov s homotopsko formulacijo, v povezavi z ustreznimi fleksibilnostnimi pogoji na kodomene holomorfnih preslikav. Namen dela je bil predstaviti razvoj principa Oka od klasičnega principa Oka-Grauert iz let 1939–1958, preko homotopskega principa in eliptičnih mnogoterosti, pojmov, ki ju je uvedel Mikhail Gromov leta 1989, teorije Andersén-Lempert (1992) o holomorfnih avtomofizmih kompleksnih evklidskih prostorov in njim sorodnih kompleksnih mnogoterosti, do novejših rezultatov avtorja in njegovih številnih sodelavcev od l. 2000 dalje.

Glavna pojma knjige sta Steinova mnogoterost in mnogoterost Oka, ki sta v določenem smislu dualna. Steinove mnogoterosti so zaprte kompleksne podmnogoterosti kompleksnih evklidskih prostorov. Posledično imajo take mnogoterosti veliko holomorfnih funkcij in s tem tudi obilico holomorfnih preslikav v kompleksne evklidske prostore; torej so naravne domene holomorfnih preslikav. Po drugi strani pa mnogoterosti Oka vsebujejo obilico holomorfnih slik kompleksnih evklidskih prostorov in so zato naravne kodomene holomorfnih preslikav. Zato je naravno pričakovati obstoj velike družine holomorfnih preslikav Steinovih mnogoterosti v mnogoterosti Oka. Potrditev in preciziranje tega dejstva so med glavnimi rezultati, predstavljenimi v pričujoči knjigi.

Knjiga je razdeljena v tri večje sklope. V prvem sklopu z naslovom Stein Manifolds (str. 2–203) se nahajajo poglavja Preliminaries, Stein manifolds, Stein Neighborhoods and Approximation ter Automorphisms of Complex Euclidean Spaces, kjer so predstavljene nekatere temeljne teme analize na Steinovih mnogoterostih.

Osrednji del knjige predstavlja drugi sklop Oka Theory (str. 207–349). Poglavje Oka Manifolds se začne z zgodovinskim pregledom klasične teorije Oka-Grauert. Glavnina poglavja je posvečena moderni teoriji Oka, ki je nastala po letu 2000. Avtor uvodoma predstavi definicijo mnogoterosti Oka, ki jo je uvedel v enem od svojih člankov l. 2009: kompleksno mnogoterost Y imenujemo *mnogoterost Oka*, če lahko vsako holomorfno preslikavo $f : K \to Y$ z okolice neke kompaktne konveksne podmnožice K kompleksnega evklidskega prostora $\mathbb{C}^n$ (za poljuben n) aproksimiramo enakomerno na K s holomorfnimi preslikavami $\mathbb{C}^n \to Y$. Preostanek poglavja je posvečen dokazu glavnega izreka (izrek 5.4.4), ki pove, da holomorfne preslikave Steinovih mnogoterosti v Oka mnogoterosti zadoščajo vsem pomembnim rezultatom klasične funkcijske teorije v odsotnosti topoloških ovir. Poglavje se zaključi z vrsto med seboj netrivialno ekvivalentnih karakterizacij mnogoterosti Oka. V naslednjem poglavju Elliptic Complex Geometry and Oka Theory je predstavljen koncept eliptičnosti, ki ga je uvedel v teorijo M. Gromov v pomembnem delu leta 1989. Podrobno je predstavljen dokaz izreka Gromova o homotopskem principu za prereze eliptičnih holomorfnih submerzij nad Steinovimi prostori in nekatere posplošitve. Vsaka eliptična kompleksna mnogoterost je tudi mnogoterost Oka, obratno pa ne velja. V naslednjem poglavju Flexibility Properties of Complex Manifolds and Holomorphic Maps avtor razloži, kako se pojma mnogoterosti Oka in eliptičnosti vklapljata v druge znane holomorfne fleksibilnostne lastnosti kompleksnih mnogoterosti kot so C-povezanost, Liouvilleova lastnost, veljavnosti transverzalnostnih izrekov za holomorfne preslikave in druge. Poglavje vsebuje tudi pregled novejših rezultatov po 1. izdaji knjige l. 2011.

V tretjem, zadnjem delu knjige, z naslovom Applications (353–531), so v poglavju Applications of Oka Theory and Its Methods predstavljeni primeri uporabe teorije Oka za iskanje prerezov holomorfnih vlaknenj, uporaba v teoriji transverzalnosti za holomorfne preslikave, odstranjevanje samopresečišč, uporaba principa Oka v rešitvi holomorfnega Vassersteinovega problema in vrsta drugih. V poglavju Embeddings, Immersions and Submersions so predstavljene konstrukcije holomorfnih vložitev in imerzij Steinovih mnogoterosti v evklidske prostore ter sorodne kompleksne mnogoterosti, princip Oka za prave holomorfne preslikave, konstrukcija holomorfnih funkcij brez kritičnih točk na Steinovih mnogoterostih, ter konstrukcije pravih holomorfnih vložitev odprtih Riemannovih ploskev v evklidsko ravnino $\mathbb{C}^2$. V zadnjem poglavju, Topological Methods in Stein Geometry, je predstavljena Eliashberg-Gompfova konstrukcija integrabilnih Steinovih struktur na skoraj kompleksnih mnogoterostih, s posebnim poudarkom na 4-dimenzionalnih mnogoterostih in s tem povezanim ›mehkim‹ principom Oka, ki poleg običajne homotopske deformacije preslikav dodatno dopušča homotopno spremembo kompleksne strukture na izvorni Steinovi mnogoterosti.

Pričujoča knjiga je – tako kot njena predhodnica iz l. 2011 – postala pomembna referenca za vsakogar, ki se raziskovalno ukvarja s kompleksno analizo, posebej za tiste, ki se ukvarjajo s principom Oka v katerikoli njegovi različici. Gre za edino knjigo, kjer je (poleg klasične Steinove teorije) predstavljena tako teorija Oka kot tudi teorija kompleksnih mnogoterosti z veliko grupo holomorfnih avtomorfizmov (taki so npr. kompleksni evklidski prostori in velika večina kompleksnih Liejevih grup in homogenih prostorov). V delu je prikazano, kako sta ti dve področji kompleksne analize med seboj intimno povezani.

Na osnovi razvoja teorije Oka v zadnjih desetletjih in še posebej uvedbe pojma Oka mnogoterosti v literaturo je bilo leta 2020 v matematično klasifikacijo MSC-2020 uvedeno novo področje »32Q56 Oka principle and Oka manifolds«.

Jasna Prezelj