FUNDAMENTALNA GRUPA IN koH-PROSTORI

ALEKSANDRA FRANC

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Ljubljana

Math. Subj. Class. (2000): 55M30, 55Q05

V članku pokažemo, da je fundamentalna grupa koH-prostora prosta. Najprej ponovimo potrebne algebraične definicije in predstavimo pojem fundamentalne grupe. V osrednjem razdelku definiramo koH-prostore in dokažemo zgornjo trditev, na koncu pa predstavimo povezavo z nekaterimi nedavnimi rezultati o fundamentalni grupi mnogoterosti.

FUNDAMENTAL GROUP AND coH-SPACES

After a quick revision of necessary algebraic definitions we explain the concept of the fundamental group in some detail. In the main section we define coH-spaces and prove that the fundamental group of a coH-space is free. Finally, we present some recent results concerning the fundamental groups of manifolds.

1. Uvod

Realne funkcije lahko seštevamo, odštevamo, množimo, itd. Splošneje, na funkcijah, ki slikajo v množico z neko algebraično strukturo, lahko definiramo operacijo po točkah. Tako na primer množico funkcij iz topološkega prostora X v grupo G opremimo s strukturo grupe.

Težje si je predstavljati, kako množico preslikav iz nekega prostora C v prostor X na naraven način opremiti s strukturo grupe. Videli bomo, kako množico preslikav iz krožnice v poljuben prostor X opremimo s strukturo grupe, če pri tem enačimo preslikave, ki so homotopne. Prostorom te vrste pravimo koH-grupe in so osnovni gradniki za konstrukcijo bolj zapletenih prostorov. Pojem koH-prostora je nekoliko splošnejši: ne zahtevamo, da je naša množica funkcij grupa, želimo le, da je opremljena z asociativno operacijo.

Ena od osnovnih lastnosti koH-prostorov je, da imajo prosto fundamentalno grupo. V članku bomo najprej predstavili potrebno algebraično ozadje in pojem fundamentalne grupe, potem pa bomo definirali koH-prostor in dokazali to trditev. Definicijo koH-prostora bomo nato posplošili, kar nas bo pripeljalo do Whiteheadove definicije Lusternik-Schnirelmannove kategorije (pri koH-prostorih je namreč ta enaka 1). Seznanili se bomo tudi z novejšimi rezultati, ki odgovarjajo na vprašanje, kaj lahko povemo o fundamentalni grupi prostorov z večjo LS kategorijo (zanimivi so še prostori z LS kategorijo 2 ali 3).

2. Nekaj algebre

V osrednjem delu članka bomo potrebovali pojme proste grupe, prostega produkta grup in prezentacije grupe. Pri slednji gre za opis grupe s podajanjem množice generatorjev in množice relacij med njimi. Kadar teh relacij ni, je grupa prosta. Podobno v prostem produktu poljubnih grup ni relacij med elementi iz različnih faktorjev. Lotimo se bolj formalnega opisa.

Naj bo $M \neq \emptyset$ poljubna neprazna množica. Označimo z M^{-1} množico formalnih inverzov $M^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in M\}$ in naj velja $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$ za vse $x \in M \cup M^{-1}$.

Elemente $M \cup M^{-1}$ razglasimo za *abecedo*. Oglejmo si množico vseh končnih *besed*, ki jih lahko tvorimo v tej abecedi. Če na primer naša abeceda vsebuje črke a, b in c, so $abaa^{-1}$, cc^{-1} in $abcabc$ besede. Najprej se dogovorimo, da bomo vse besede zapisali karseda enostavno. Besedo, ki ne vsebuje nobenih črk, označimo z ε in jo imenujmo *prazna beseda*. Kadarkoli se v besedi pojavi par aa^{-1} ali pa $a^{-1}a$, ga zamenjajmo z ε, pare oblike εa ali $a\varepsilon$ pa z a. Postopku, s katerim poljubno besedo karseda poenostavimo, pravimo *redukcija*. Če reduciramo besede iz zgornjega primera, dobimo ab, ε in $abcabc$.

Označimo množico vseh reduciranih besed (vključno s prazno besedo) z M^*. Na M^* lahko vpeljemo operacijo $M^* \times M^* \to M^*$ takole: dani besedi staknemo, nato pa po potrebi dobljeno besedo še reduciramo. Na primer:

$$\begin{aligned} ab \cdot cb^{-1} &\mapsto abcb^{-1}, \\ aaabc \cdot c^{-1}a &\mapsto aaaba\,, \\ ab \cdot b^{-1}a^{-1} &\mapsto \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Izkaže se, da je M^* za tako definirano operacijo stikanja in redukcije besed grupa. Stik dveh besed je spet beseda. Enota je prazna beseda ε, inverz dane besede pa dobimo tako, da vse njene črke zamenjamo z njihovimi inverzi in obrnemo vrstni red, na primer:

$$\left(ab^{-1}c\right)^{-1} = c^{-1}ba^{-1}.$$

Omenimo še, da je zaradi krajšanja dokaz asociativnosti težaven.

Definicija 1. Množica M^* z operacijo stikanja in redukcije je *prosta grupa* nad množico M. Pravimo, da je M^* *prosto generirana* z M in pišemo $M^* = F_M$.

Primer 1. Naj bo $M = \{a\}$ množica z enim elementom. Potem je

$$M^* = \{\varepsilon, a, a^{-1}, aa, a^{-1}a^{-1}, aaa, a^{-1}a^{-1}a^{-1}, \ldots\}.$$

Če pišemo

$$\underbrace{a \ldots a}_{n} = a^n \quad \text{in} \quad \underbrace{a^{-1} \ldots a^{-1}}_{n} = a^{-n},$$

potem je operacija stikanja in redukcije na M^* podana z $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, in prosta grupa nad M je izomorfna grupi $\mathbb{Z}$ za seštevanje.

Oglejmo si še eno sorodno konstrukcijo. Naj bosta dani grupi G_1 in G_2 in tvorimo besede $x_1 x_2 \ldots x_n$, v katerih je vsaka od črk iz ene od grup G_i, $i = 1, 2$. Če nobeni dve zaporedni črki nista iz iste grupe, pravimo, da je beseda reducirana. Kadar obstaja par zaporednih črk $x_j, x_{j+1} \in G_i$, ju lahko v G_i zmnožimo v eno samo črko. Tako lahko iz poljubne besede napravimo reducirano. Na množico $G_1 * G_2$ reduciranih besed podobno kot zgoraj vpeljemo operacijo stikanja z redukcijo in dobimo grupo.

Definicija 2. Množica $G_1 * G_2$ z operacijo stikanja in redukcije je *prosti produkt* grup G_1 in G_2.

Primer 2. Naj bosta $G_1 = F_{\{a\}}$ in $G_2 = F_{\{b\}}$ prosti grupi, generirani z a oziroma b. Potem lahko vsak netrivialni element prostega produkta $G_1 * G_2$ zapišemo v obliki

$$\begin{array}{llll} a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \ldots a^{n_k} b^{m_k} & \text{ali} & b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \ldots a^{n_k} b^{m_k} & \text{ali} \\ a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \ldots a^{n_k} & \text{ali} & b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \ldots a^{n_k}. & \end{array}$$

Vidimo, da je v tem primeru prosti produkt $G_1 * G_2$ grupa, ki je prosto generirana z a in b, $F_{\{a\}} * F_{\{b\}} = F_{\{a,b\}}$.

V primeru prostega produkta prostih grup smo znali poiskati tako množico M, da je bila $G_1 * G_2$ prosta grupa nad M (res, za poljubni neprazni disjunktni množici M_1 in M_2 je $F_{M_1} * F_{M_2} = F_{M_1 \cup M_2}$). V splošnem pa take množice ne moremo najti.

Definicija 3. Grupa G je *prosta*, če obstaja kakšna množica M, da je $G = F_M$ prosta grupa nad M.

Primer 3. Naj bo $(\mathbb{Z}_2, +)$ grupa ostankov pri deljenju z 2: $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, operacija pa je podana z $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ in $1 + 0 = 0 + 1 = 1$. Naj bo M neprazna množica in $a \in M$ poljuben element. Potem je grupa $F_{\{a\}}$ neskončna podgrupa proste grupe nad M, torej je tudi prosta grupa nad M neskončna. Grupa $\mathbb{Z}_2$ je končna, torej ni prosta. Splošneje, nobena končna grupa ni prosta.

Za poljubno grupo G pa obstaja kakšna podmnožica $M \subset G$, za katero velja, da lahko vsak element iz G zapišemo (morda na več različnih načinov) kot produkt elementov iz M (na primer kar $M = G$). Pravimo, da je M množica *generatorjev* grupe G.

Trditev 1. *Preslikava $f\colon F_M \to G$, ki vsaki besedi nad M priredi tisti element grupe G, ki ga dobimo, če v G zmnožimo črke te besede (posebej: prazni besedi priredi enoto), je surjektivni homomorfizem. Vsaka grupa je torej homomorfna slika neke proste grupe. Jedro* $\ker f$ *je podgrupa edinka v F_M in G je izomorfna faktorski grupi $F_M / \ker f$.*

Jedro $\ker f$ je generirano z neko množico $R \subset F_M$. Pišemo $G = \langle M | R \rangle$ in pravimo, da je grupa G *podana z generatorji in relacijami*, $\langle M | R \rangle$ pa imenujemo *prezentacija* grupe G.

Primer 4. Prosta grupa F_M ima prezentacijo $\langle M | \emptyset \rangle =: \langle M \rangle$. Med elementi proste grupe torej ni relacij. Posebej, $\mathbb{Z} \cong \langle a \rangle$.

Primer 5. Grupa $(\mathbb{Z}_2, +)$ je izomorfna $\langle a | a^2 \rangle$. Splošneje, grupa ostankov $(\mathbb{Z}_n, +)$ je izomorfna $\langle a | a^n \rangle$.

Primer 6. Kartezični produkt dveh grup ni niti prosti produkt niti prosta grupa. Elementi $G \times H$ so (urejeni) pari (g, h), kjer je $g \in G$ in $h \in H$. Operacija je definirana po komponentah: $(g, h) \cdot (g', h') = (gg', hh')$. Naj e_A označuje enoto v grupi A. Potem je

$$(g, e_H) \cdot (e_G, h) = (g, h) = (e_G, h) \cdot (g, e_H)\,.$$

Vsak element oblike (g, e_H) komutira z vsakim elementom oblike (e_G, h), zato imamo med elementi kartezičnega produkta relacije

$$(g, e_H)(e_G, h)(g, e_H)^{-1}(e_G, h)^{-1} = e_{G\times H}\,.$$

Taka grupa torej ni prosta.

Vsaka grupa ima več različnih prezentacij. Če obstaja kakšna prezentacija $G = \langle M|R \rangle$, ki ima končno množico generatorjev M, pravimo, da je grupa G *končno generirana.* Če obstaja prezentacija, v kateri sta množici M in R obe končni, pravimo, da je grupa G *končno prezentirana.*

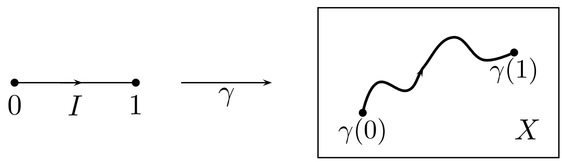
V dokazu našega glavnega izreka bomo potrebovali še naslednje dejstvo:

Izrek 2 (Nielsen-Schreier). *Podgrupa proste grupe je prosta.*

3. Fundamentalna grupa

V tem razdelku definiramo fundamentalno grupo (topološkega) prostora in predstavimo tiste lastnosti, ki jih potrebujemo v nadaljevanju. Bralci, ki ste s tem pojmom že seznanjeni, lahko ta del preskočite, tistim, ki bi o fundamentalni grupi želeli izvedeti kaj več, pa v branje priporočamo članek [3] ali pa prvo poglavje [4]. Pod pojmom prostor bomo vedno razumeli topološki prostor (množico, opremljeno s topologijo).

Pot je zvezna preslikava $\gamma \colon I \to X$ iz intervala $I = [0, 1]$ v prostor X (slika 1). Točko $\gamma(0)$ imenujemo *začetna*, točko $\gamma(1)$ pa *končna točka* poti γ. Pot, pri kateri sta začetna in končna točka isti, imenujemo *zanka.* V prostoru X izberemo točko x_0, jo razglasimo za *izhodišče* in množico vseh zank, ki se začnejo in končajo v x_0, sugestivno označimo z $\Omega(X, x_0)$.



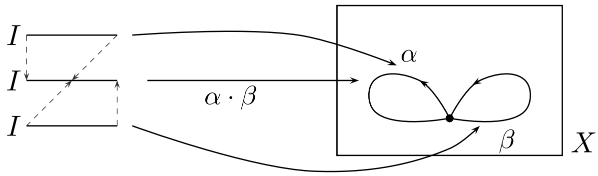
Slika 1. Pot v prostoru X je zvezna preslikava $\gamma \colon I \to X$.

Na $\Omega(X, x_0)$ imamo naravno operacijo *stikanja zank.* Ker smo se omejili le na poti, ki se začnejo in končajo v točki x_0, lahko za poljubni dve zanki α in β definiramo njun *stik* kot tisto zanko, ki najprej poteka po α, nato pa še po β, oziroma s formulo $(\alpha \cdot \beta) \colon [0, 1] \to X$,

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t)\,, & 0 \le t \le \frac{1}{2}\,, \\ \beta(2t-1)\,, & \frac{1}{2} \le t \le 1\,. \end{cases}$$

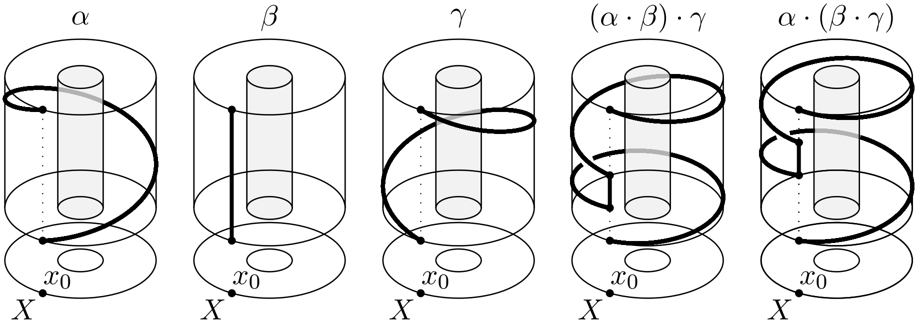
Stik zank α in β je torej tista zanka, pri kateri v prvi polovici časovnega intervala prehodimo α, nato pa v drugi polovici še β (slika 2). Seveda se moramo zato po α in β premikati dvakrat hitreje.

Vendar pa stikanje zank ni asociativno. Zanka $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ ni enaka zanki $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$. Obe sicer opišeta isto krivuljo, a sta različno parametrizirani:



Slika 2. Stikanje zank

enkrat se v prvi polovici časa pomaknemo po $\alpha \cdot \beta$ (po vsaki od teh dveh torej v $\frac{1}{4}$ celotnega časa) in v drugi polovici po γ, drugič pa prvo polovico časa porabimo za zanko α in v preostali polovici pretečemo $\beta \cdot \gamma$ (spet za vsako porabimo $\frac{1}{4}$ časa). Asociativnost torej velja le do reparametrizacije natančno. Primer zank, pri katerih sta stika $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ in $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ različna, je prikazan na sliki 3. Tu so α, β in γ zanke v S^1, vendar smo zaradi preglednosti na sliko dodali še dodatno dimenzijo, ki pomeni časovni interval.



Slika 3. Stika $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ in $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ nista enaka.

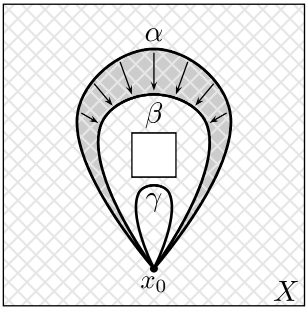
Zatakne se tudi, ko želimo najti nevtralni element. Poskusimo s konstantno zanko

$$c_{x_0} \colon I \to X\,, \quad t \mapsto x_0\,,$$

ki ves čas miruje v izhodišču. Ko poljubno zanko α staknemo s c_{x_0}, dobimo zanko, ki je v prvi polovici časa enaka α in v drugi polovici miruje v izhodišču, vendar lahko s pomočjo reparametrizacij čas mirovanja skrajšujemo in nazadnje ostane le še α (glej sliko 5). Če dopuščamo reparametrizacijo, je torej konstantna zanka desna enota in podoben premislek pokaže, da je tudi leva enota.

Kako pa je z inverzi? Za dano zanko α želimo najti tako zanko $\overline{\alpha}$, da bomo njun stik lahko nekako povezali s konstantno zanko. Hitro opazimo, da tu reparametrizacija ne zadošča. Ne želimo namreč zgolj spreminjati hitrosti, s katero prehodimo α in $\overline{\alpha}$, temveč sploh ne želimo zapustiti izhodišča.

Naše pogoje zato še nekoliko omilimo in zahtevamo, da veljajo le do homotopije natančno: dve zanki štejemo za enaki, kadar lahko znotraj prostora X sliko prve zvezno preoblikujemo v sliko druge (slika 4).



Slika 4. V tem prostoru z luknjo sta zanki α in β homotopni, α in γ pa ne.

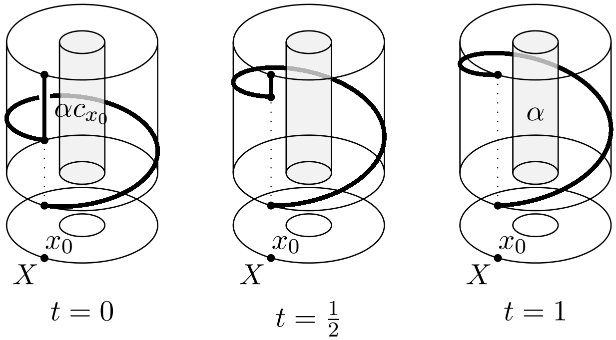
Za zvezni preslikavi $f, g \colon A \to X$ pravimo, da sta *homotopni*, če obstaja zvezna preslikava $H \colon A \times I \to X$, za katero je $H(a, 0) = f(a)$ in $H(a, 1) = g(a)$ za vse $a \in A$. Preslikavo H imenujemo *homotopija* med preslikavama f in g in pišemo $H \colon f \simeq g$ ali pa kar $f \simeq g$. Pri vsakem $t \in I$ je tako s predpisom $f_t(a) = H(a, t)$ podana zvezna preslikava $A \to X$. Ko t teče od 0 do 1, preslikava f_t zvezno deformira f v g (potek te deformacije med α in β je na sliki 4 nakazan s puščicami).

Kadar sta (A, a_0) in (X, x_0) prostora z izhodiščem, zahtevamo, da slikata f in g točko a_0 v točko x_0. Če za homotopijo $H \colon f \simeq g$ velja še $H(a_0, t) = x_0$ za vse $t \in I$, pravimo, da sta f in g homotopni *rel izhodišče*, oziroma da homotopija H v izhodišču miruje.

V primeru poti je $A = I$, torej je homotopija dveh poti zvezna preslikava kvadrata v prostor, ki njegov spodnji rob preslika v prvo in zgornji rob v drugo pot. Pri homotopiji, ki naj v izhodišču miruje, zahtevamo še, da se levi rob kvadrata preslika v izhodišče. Če namesto poti gledamo zanke, se v izhodišče preslika tudi desni rob kvadrata. Na sliki 4 sliki kvadrata ustreza temno senčeno območje.

Lahko je videti, da je homotopnost zank ekvivalenčna relacija. Na kvocientni množici $\Omega(X, x_0)/_{\simeq}$ vseh homotopskih razredov zank v X z izhodiščem x_0 lahko torej definiramo operacijo

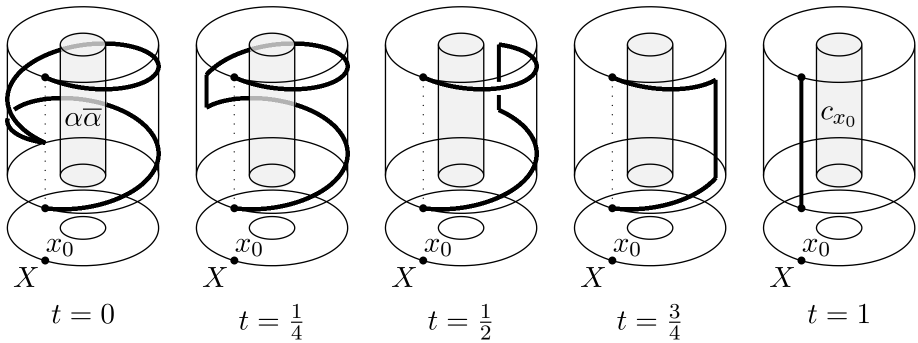
$$[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta]\,,$$



Slika 5. Zanka αc_{x_0} je homotopna α.

ki paru homotopskih razredov zank priredi razred, ki pripada njunemu stiku. Za tako definirano operacijo postane kvocientna množica grupa, ki jo označimo s $\pi_1(X, x_0)$ in jo imenujemo *fundamentalna grupa* prostora (X, x_0).

Enota v $\pi_1(X, x_0)$ je homotopski razred konstantne zanke $[c_{x_0}]$, inverz razreda $[\alpha]$ pa predstavlja zanka $\overline{\alpha}$, podana z $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ (po zanki α se sprehodimo v nasprotni smeri). Homotopija med $\alpha \cdot c_{x_0}$ in α je podana z družino reparametrizacij, ki smo jo opisali zgoraj (slika 5), homotopijo med $\alpha \cdot \overline{\alpha}$ in c_{x_0} pa dobimo tako, da se sprehajamo po vedno krajših delih poti α in $\overline{\alpha}$, dokler se nazadnje nikamor ne premaknemo (slika 6).



Slika 6. Zanka $\alpha\overline{\alpha}$ je homotopna konstantni zanki c_{x_0}.

Če je X povezan s potmi (med poljubnima dvema točkama iz X obstaja vsaj ena pot), večkrat pišemo kar $\pi_1(X)$. Kadar obstaja pot med točkama $x_0, x_1 \in X$, sta namreč grupi $\pi_1(X, x_0)$ in $\pi_1(X, x_1)$ izomorfni.

Primer 7. Če obstaja homotopija $H\colon X \times I \to X$ med identiteto $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ in konstantno preslikavo $x \mapsto a$ za neki $a \in X$, pravimo, da je prostor X *kontraktibilen.* Tedaj obstaja homotopija med identiteto in poljubno konstantno preslikavo (posebej med id_X in $x \mapsto x_0$). V takem prostoru lahko poljubno zanko α skrčimo v točko. Homotopijo med α in konstantno zanko dobimo kot kompozitum $H \circ (\alpha, \mathrm{id}_I)\colon I \times I \to X$. Kadar je prostor X kontraktibilen, imamo torej en sam homotopski razred zank in je grupa $\pi_1(X, x_0)$ trivialna.

Primer 8. Krožnica S^1 ima netrivialno fundamentalno grupo. Če si S^1 predstavljamo kot enotsko krožnico v $\mathbb{C}$, potem je za poljubno celo število n s predpisom

$$\omega_n\colon I \to S^1, \quad t \mapsto e^{2\pi i n t},$$

podana zanka, ki se n-krat navije na S^1 (pri zankah α, β in γ s slike 3 je zaporedoma $n = 1$, $n = 0$ in $n = -1$). Ni težko verjeti, da zanke ω_1, ki se enkrat navije na krožnico, ne moremo zvezno deformirati do trivialne zanke ω_0, ki miruje v izhodišču $1 \in S^1$. Še več: zanki ω_n in ω_m sta homotopni natanko tedaj, ko je $m = n$, poleg tega pa je poljubna zanka v S^1 homotopna ω_n za neko (točno določeno) celo število n. Tako ugotovimo, da je $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Formalni dokaz te trditve je običajno eden prvih, s katerimi se srečamo pri študiju algebraične topologije.

Predpis, ki topološkemu prostoru priredi njegovo fundamentalno grupo, ima naslednjo pomembno lastnost: zvezna preslikava $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ inducira homomorfizem grup

$$\varphi_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0),$$

podan s predpisom

$$\varphi_\#([\alpha]) = [\varphi \circ \alpha].$$

Če sta $\varphi, \psi\colon X \to Y$ homotopni preslikavi, sta inducirana homomorfizma $\varphi_\#$ in $\psi_\#$ enaka. Vedno velja tudi $(\varphi \circ \psi)_\# = \varphi_\# \circ \psi_\#$, identiteta $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ pa inducira identiteto na $\pi_1(X)$. Temu pravimo *funktorialnost*.

Obstajajo izreki, ki nam povedo, kakšna je fundamentalna grupa prostora, če ga znamo nekako sestaviti iz enostavnejših kosov, katerih fundamentalne grupe poznamo. Če je na primer $g\colon I \to X$ zanka v X in $h\colon I \to Y$ zanka v Y, potem je preslikava $(g, h)\colon I \to X \times Y$ zanka v $X \times Y$. Obratno, vsaki poti $I \to X \times Y$ pripada par poti (g, h), kjer je $g\colon I \to X$ pot v X in $h\colon I \to Y$ pot v Y. Če sta $pr_X\colon X \times Y \to X$ in $pr_Y\colon X \times Y \to Y$ projekciji, sta namreč poti g in h določeni s predpisom $g = \mathrm{pr}_X \circ f$ in $h = \mathrm{pr}_y \circ f$. Enako iz homotopije H med zankama f_1 in f_2 v $X \times Y$ dobimo homotopiji $pr_X \circ H$ med pripadajočima zankama g_1 in g_2 v X ter $pr_Y \circ H$ med h_1 in h_2 v Y. Od tod ni več daleč do naslednjega izreka (glej [4], str. 34):

Trditev 3. *Če sta prostora X in Y povezana s potmi, potem je*

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)\,.$$

Oglejmo si še primer, ko dana prostora (X, x_0) in (Y, y_0) zlepimo v nov prostor tako, da identificiramo izhodišči x_0 in y_0. Dobljeni prostor imenujemo *šop* prostorov X in Y in ga običajno podamo kot podprostor produkta $X \times Y$:

$$X \vee Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid x = x_0 \text{ ali } y = y_0\}\,.$$

Primer 9. Šop dveh krožnic $S^1 \vee S^1$ običajno imenujemo *osmica*. Induktivno lahko tvorimo tudi šop večjega števila prostorov. Če imamo v šopu več krožnic, dobimo prostor, ki res spominja na šopek (slika 7).

$S^1 \vee S^1$ $\qquad\qquad$ $S^1 \vee S^1 \vee \ldots \vee S^1$

Slika 7. Osmica (šop dveh krožnic) in šop več krožnic

Trditev 4. *Fundamentalna grupa šopa je prosti produkt fundamentalnih grup faktorjev:*

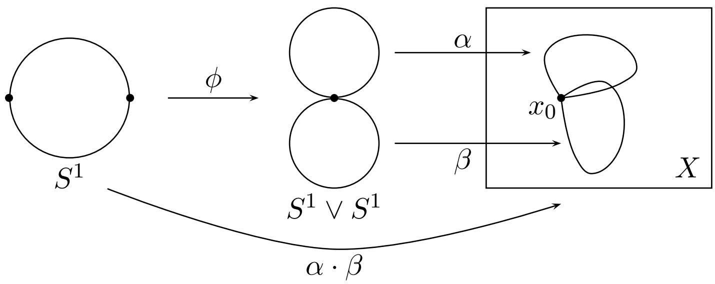
$$\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)\,.$$

Fundamentalna grupa šopa dveh prostorov je torej v splošnem bolj zapletena kot fundamentalna grupa produkta. Slednja je preprostejša, ker je vsaka zanka v produktu določena s po eno zanko iz vsakega faktorja in ti zanki sta med seboj neodvisni. Zanka v šopu $X \vee Y$ je sestavljena iz več odsekov, od katerih poljubna sosednja ležita v različnih prostorih. Opišemo jo torej lahko z zaporedjem zank $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$, pri čemer zanke α_i ležijo v X, zanke β_i pa v Y (pri tem lahko kakšno na začetku ali na koncu izpustimo, ne smemo pa spreminjati vrstnega reda). To nas takoj spomni na konstrukcijo proste grupe – vsaki zanki ustreza neka beseda. Zgornji rezultat nas torej ne preseneča.

4. O koH-prostorih

Poti smo definirali kot zvezne preslikave intervala v prostor, potem pa smo se takoj omejili na zanke. Ker smo vsakič zahtevali, da se začetna in končna točka intervala preslikata v isto točko, ju lahko že pred tem identificiramo in zanke definiramo kot zvezne preslikave krožnice v prostor. Kako pa v tem primeru opišemo stikanje?

Naj bosta $\alpha, \beta\colon (S^1, 1) \to (X, x_0)$ zvezni preslikavi krožnice v prostor. Pri definiciji z intervali smo dobili stik z lepljenjem dveh kopij intervala tako, da se je končna točka prvega ujela z začetno točko drugega. Rezultat je bil spet interval (sicer nekoliko daljši, a smo si nato pomagali še z reparametrizacijo), zato smo v tem lahko prepoznali novo pot (slika 2). Na tem intervalu so se v isto točko preslikale točke 0, 1 in $\frac{1}{2}$. Če te točke identificiramo, dobimo šop dveh krožnic. Prvo moramo preslikati z α, drugo pa z β. Ker želimo preslikavo iz S^1, vse skupaj še predkomponiramo s preslikavo $\phi\colon S^1 \to S^1 \vee S^1$, ki identificira točki 1 in -1 (slika 8). Kompozitum $(\alpha \vee \beta)\phi\colon S^1 \to X$ je zanka, ki ustreza stiku $\alpha \cdot \beta$.



Slika 8. Stikanje zank $(S^1, 1) \to (X, x_0)$

Naj bodo X topološki prostor, $\Delta\colon X \to X \times X$ preslikava, podana s predpisom $x \mapsto (x, x)$, in $J\colon X \vee X \to X \times X$ inkluzija. Kadar obstaja zvezna preslikava $\phi\colon X \to X \vee X$, za katero je $J\phi \simeq \Delta$, je X *koH-prostor*. Pravimo, da *do homotopije natančno komutira diagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\Delta"'] & X \vee X \arrow[d, "J"] \\ & X \times X \end{tikzcd}$$

(Obstoj preslikave ϕ ni odvisen od izbire točk, v katerih staknemo dve kopiji prostora X v $X \vee X$.)

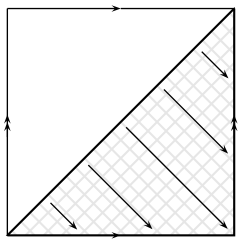
Primer 10. Naj bo $X = S^1 = \{e^{i\vartheta} \mid \vartheta \in [0, 2\pi]\}$ kompleksna krožnica. Šop dveh krožnic podajmo kot

$$S^1 \vee S^1 = \{(e^{i\xi}, 1) \mid \xi \in [0, 2\pi]\} \cup \{(1, e^{i\psi}) \mid \psi \in [0, 2\pi]\}\,.$$

Preslikava $\phi\colon S^1 \to S^1 \vee S^1$ naj bo podana s

$$\phi(e^{i\vartheta}) = \begin{cases} (e^{2i\vartheta}, 1)\,, & \vartheta \in [0,\pi]\,, \\ (1, e^{2i(\vartheta-\pi)})\,, & \vartheta \in [\pi, 2\pi]\,. \end{cases}$$

Potem je $J\phi(e^{i\vartheta}) = (e^{2i\vartheta}, 1)$ za $\vartheta \in [0,\pi]$ in $J\phi(e^{i\vartheta}) = (1, e^{2i(\vartheta-\pi)})$ za $\vartheta \in [\pi, 2\pi]$. Po drugi strani je $\Delta(e^{i\vartheta}) = (e^{i\vartheta}, e^{i\vartheta})$. Očitno $J\phi \neq \Delta$. Obstaja pa homotopija $H\colon S^1 \times I \to S^1 \times S^1$, za katero je $H|_{S^1\times\{0\}} = J\phi$ in $H|_{S^1\times\{1\}} = \Delta$. Ker je torej $J\phi \simeq \Delta$, je S^1 koH-prostor. Homotopijo H si najlažje predstavljamo, če torus $S^1 \times S^1$ predstavimo kot kvadrat, v katerem zlepimo para nasprotnih stranic. Slika preslikave Δ je ena od diagonal kvadrata, slika preslikave $J\phi$ pa par nevzporednih stranic (slika 9). Homotopijo dobimo tako, da diagonalo potisnemo na stranici.



Slika 9. Sled homotopije $H\colon S^1 \times I \to S^1 \times S^1$ med $J\phi$ in Δ

Zdaj lahko končno formuliramo in dokažemo našo glavno trditev:

Trditev 5. *Naj bo X ko-H prostor. Potem je grupa $\pi_1(X)$ prosta.*

Dokaz. Začnimo s homotopsko komutativnim diagramom

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\Delta"'] & X \vee X \arrow[d, "J"] \\ & X \times X \end{tikzcd}$$

iz definicije koH-prostora. Vemo tudi, da je $\pi_1(X \vee X) = \pi_1(X) * \pi_1(X)$ in $\pi_1(X \times X) = \pi_1(X) \times \pi_1(X)$. Od tod zaradi funktorialnosti sledi, da komutira tudi diagram

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[r, "\phi_\#"] \arrow[dr, "\Delta_\#"'] & \pi_1(X) * \pi_1(X) \arrow[d, "J_\#"] \\ & \pi_1(X) \times \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

torej je $J_\# \circ \phi_\# = \Delta_\#$. Inducirana preslikava $\Delta_\#$ je spet diagonala (le da tokrat na $\pi_1(X)$ in ne na X), ker slika $a \in \pi_1(X)$ v par $(a, a) \in \pi_1(X) \times \pi_1(X)$.

Seveda je diagonala $\Delta_\#$ injektivna, zato je tudi $\phi_\#$ injektivna. Poleg tega je $J_\#(\operatorname{im} \phi_\#) = \operatorname{im}(J_\# \circ \phi_\#) = \operatorname{im} \Delta_\#$, od koder sklepamo, da je $\operatorname{im} \phi_\# \subset J_\#^{-1}(\operatorname{im} \Delta_\#)$.

Naj bo

$$F := J_\#^{-1}(\operatorname{im} \Delta_\#) \subset \pi_1(X) * \pi_1(X) .$$

Pravkar smo videli, da je $\operatorname{im} \phi_\# \subset F$ in lahko na $\pi_1(X)$ gledamo kot na podgrupo grupe F. Zadostuje torej, če pokažemo, da je grupa F prosta, ker bo tedaj po Nielsen-Schreierjevem izreku (izrek 2) tudi podgrupa $\pi_1(X)$ prosta.

Spomnimo se, da so elementi v prostem produktu $\pi_1(X) * \pi_1(X)$ besede iz elementov $\pi_1(X)$. Ker se lahko isti element $\pi_1(X)$ v besedi pojavi kot element poljubnega od faktorjev, bo pomembno vedeti, katerega imamo v mislih. Za poljuben $a \in \pi_1(X)$ naj $j(a)$ pomeni njegovega predstavnika v prvem faktorju in $j'(a)$ njegovega predstavnika v drugem faktorju. Preslikava $J_\#$ torej preslika besedo $j(a_1)j'(b_1) \dots j(a_n)j'(b_n)$ v par $(a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n)$.

Označimo z G podgrupo $\pi_1(X) * \pi_1(X)$, ki je prosto generirana z elementi oblike $j(g)j'(g)$, in pokažimo, da je $F = G$. Seveda je G prosta grupa, zato bo od tod sledilo, da je tudi grupa F prosta.

Ker je $J_\#(j(a_1)j'(a_1) \dots j(a_n)j'(a_n)) = (a_1 \dots a_n, a_1 \dots a_n) \in \operatorname{im} \Delta_\#$, je $G \subset F$. Dokažimo še, da je $F \subset G$. Če dopuščamo, da je morda prva ali pa zadnja črka besede enaka enoti, lahko vsak element iz $\pi_1(X) * \pi_1(X)$ (in tako tudi vsak element F) zapišemo v obliki $j(a_1)j'(b_1) \dots j(a_k)j'(b_k)$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Označimo s F_n množico vseh elementov *dolžine* n iz F, tj. elementov oblike

$$j(a_1)j'(b_1) \dots j(a_n)j'(b_n) .$$

Z indukcijo pokažemo, da za vsa naravna števila n velja $F_n \subset G$. Pri $n = 1$ naj bo $x \in F_1 \subset F$ oblike $j(a)j'(b)$. Ker je $J_\#(x) = (a, b) \in \operatorname{im} \Delta_\#$, je $a = b$ in je $x = j(a)j'(a) \in G$. Predpostavimo zdaj, da velja $F_{n-1} \subset G$, in si oglejmo $x \in F_n$ oblike

$$x = j(a_1)j'(b_1) \dots j(a_n)j'(b_n) .$$

Potem je

$$\begin{aligned} x &= j(a_1)j'(b_1)\ldots j(a_n)j'(b_n) = \\ &= j(a_1)\left[j'(a_1)j'(a_1)^{-1}\right]j'(b_1)\ldots j(a_n)\left[j(b_n)^{-1}j(b_n)\right]j'(b_n) = \\ &= \left[j(a_1)j'(a_1)\right]j'(a_1)^{-1}j'(b_1)\ldots j(a_n)j(b_n)^{-1}\left[j(b_n)j'(b_n)\right] = \\ &= \left[j(a_1)j'(a_1)\right]y^{-1}\left[j(b_n)j'(b_n)\right], \end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned} y &= j(b_n)j(a_n)^{-1}j'(b_{n-1})^{-1}\ldots j(a_3)^{-1}j'(b_2)^{-1}j(a_2)^{-1}j'(b_1)^{-1}j'(a_1) = \\ &= \left[j(b_n a_n^{-1})j'(b_{n-1})^{-1}\right]\ldots\left[j(a_3)^{-1}j'(b_2)^{-1}\right]\left[j(a_2)^{-1}j'(b_1^{-1}a_1)\right] \end{aligned}$$

neki element F_{n-1}. Po indukcijski predpostavki je torej $y \in G$, in ker je G grupa, je tudi $y^{-1} \in G$. Prav tako je $j(a_1)j'(a_1) \in G$ in $j(b_n)j'(b_n) \in G$, zato tudi za x, ki je produkt treh elementov iz G, velja $x \in G$. Pokazali smo, da je $F^\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset G$. Po drugi strani pa smo zgoraj premislili, da F^∞ generira F, in ker je G grupa, je $F = \langle F^\infty \rangle \subset G$. ■

5. LS kategorija in fundamentalna grupa

Definirajmo *debeli šop* $W^n X$ prostora X kot podprostor vseh tistih točk v n-ternem produktu X^n, ki imajo vsaj eno od koordinat enako x_0. Pri $n = 2$ dobimo šop $X \vee X$, ki se je pojavil v definiciji koH-prostora. Z $\Delta^n \colon X \to X^n$ označimo *diagonalo* $x \mapsto (x, \ldots, x)$.

Definicija 4. Naj bo X topološki prostor. Najmanjše naravno število n, za katero obstaja zvezna preslikava $\phi\colon X \to W^{n+1}X$, zanjo pa do homotopije natančno komutira diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\Delta^{n+1}"'] & W^{n+1}X \arrow[d, "i"] \\ & X^{n+1} \end{tikzcd}$$

imenujemo *Lusternik-Schnirelmannova kategorija (LS kategorija) prostora* X, $\operatorname{cat} X$.

V literaturi lahko najdemo več definicij LS kategorije, ki v splošnem sicer niso ekvivalentne, se pa ujemajo na nekaterih pomembnih razredih topoloških prostorov (glej [5]). Zgoraj smo spoznali Whiteheadovo definicijo.

Za nas bo zanimiva še bolj geometrična definicija, ki pravi, da je $\operatorname{cat} X$ enaka najmanjšemu naravnemu številu n, za katero obstaja pokritje prostora X z $n+1$ odprtimi množicami, ki so kontraktibilne v X.

Primer 11. Pri $n = 0$ je $W^{n+1}X = W^1X = \{x_0\}$ in $\Delta^1 = \mathrm{id}_X$. Če obstaja preslikava $\phi\colon X \to \{x_0\}$, za katero je $i\phi \simeq \mathrm{id}_X$, je id_X homotopna konstanti in je X kontraktibilen. Seveda lahko kontraktibilen prostor pokrijemo že z eno samo odprto kontraktibilno množico, torej je tudi geometrično kategorija kontraktibilnega prostora enaka 0.

V trditvi 5 smo dokazali: Če je $\operatorname{cat} X = 1$, potem je grupa $\pi_1(X)$ prosta. Če je $\operatorname{cat} X = 0$, je X kontraktibilen, zato je grupa $\pi_1(X)$ trivialna. Kaj pa lahko povemo o prostorih z LS kategorijo 2, 3 ali več?

Za poljubno končno prezentirano grupo π lahko konstruiramo Eilenberg-MacLaneov prostor $K(\pi,1)$, za katerega je $\pi_1(K(\pi,1)) \cong \pi$. Če se pri konstrukciji ustavimo, ko smo dodali 2-celice, dobimo 2-dimenzionalen CW kompleks K (2-skelet Eilenberg-MacLaneovega prostora $K(\pi,1)$), v katerem 1-celice ustrezajo generatorjem grupe π, 2-celice pa relacijam. Pri tem velja $\pi_1(K) = \pi$. Iz unije 0-celic, unije 1-celic in unije 2-celic zlahka konstruiramo pokritje iz treh odprtih množic, ki so kontraktibilne v K. Torej je $\operatorname{cat} K \leq 2$. Ta primer nam pove, da našega izreka ne moremo posplošiti na prostore z LS kategorijo 2. Kot smo videli, namreč za poljubno končno prezentirano grupo π obstaja prostor K, za katerega je $\operatorname{cat} K = 2$ in $\pi_1(K) = \pi$.

Nedavno pa so Dranishnikov, Katz in Rudyak v [1] pokazali, da ob nekaj dodatnih predpostavkah velja soroden izrek:

Izrek 6. *Naj bo $n \geq 3$ naravno število in naj bo M sklenjena n-mnogoterost s $\operatorname{cat} M = 2$. Potem je grupa $\pi_1(M)$ prosta.*

V istem članku so tudi pokazali, da pri $\operatorname{cat} M = 3$ analogen izrek ne velja niti za mnogoterosti. Za poljubno končno prezentirano grupo π so konstruirali 4-mnogoterost M, za katero je $\operatorname{cat} M = 3$ in $\pi_1(M) = \pi$.

LITERATURA

[1] A. N. Dranishnikov, M. G. Katz in Y. B. Rudyak, *Small values of Lusternik-Schnirelmann and Systolic Categories for Manifolds*, arXiv:0805.1527, 2008.

[2] P. Pavešić, *Lusternik-Schnirelmannova kategorija*, Obzornik mat. fiz. **51** (2004) 2, str. 33–50.

[3] P. Petek, *Fundamentalna grupa topološkega prostora*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 1/2, str. 17–26.

[4] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge 2002.

[5] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea in D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann category*, Mathematical Surveys and Monographs 103, American Mathematical Society, Providence 2003.