

... DALEČ OD DREVESA

Tine Golež

Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana

Povzetek – Članek opisuje hipotetične prednosti in zaplete, na katere bi naleteli, če bi za prevoz blaga uporabljali rov skozi naš planet. Teoretična izpeljava rezultatov ne presega srednješolske fizike.

Abstract – The article describes hypothetical advantages and obstacles which would emerge if one would drill a hole through the Earth in order to build a tunnel for free trans-planet shipping. The calculated results are derived using only upper secondary school physics.

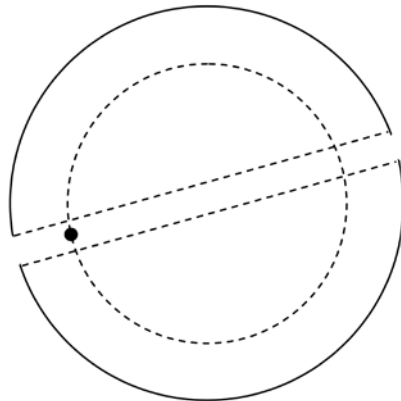
UVOD

Bil je oktober, ko sem v trgovini zagledal več zabojev jabolk, kar je za omenjeni letni čas povsem pričakovana ponudba. Pogled od blizu pa je prinesel presenečenje in pol. Jabolka so bila iz Nove Zelandije! Ne, ni šlo za skrito kamero. V resnici je svet tako globaliziran ali, če hočete, zmešan, da naši dobri letini konkurirajo jabolka, ki so prepotovala pol sveta. Izraz pol sveta v tem zapisu ni le fraza: Nova Zelandija je v resnici le malo stran od območja, kamor bi se po preslikavi čez središče Zemlje prestavila naša domovina. Seveda ni potrebno poudariti, da so bili sadeži obrani pred pol leta. Morda so trgovci ciljali prav na kupce, ki kar polnijo nakupovalne vozičke, ne da bi prebrali obvezno priloženi napis o poreklu blaga. Ob vsem tem moramo priznati, da je očitno nafta še vedno prepo-ceni. Brez dvoma je prav ta gnala prevozno sredstvo, ki nam je dostavilo jabolka, pa naj gre za morje, zrak ali kopno. Navkljub očitni cenenosti prevoza se vprašajmo, ali obstaja celo brezplačno potovanje od Nove Zelandije do Evrope.

K BREZOGLIČNEMU TRANSPORTU

Odgovor na zastavljeno vprašanje je: teoretično da, praktično ne. Zamislimo si, da se nam posreči narediti predor skozi naš planet. Seveda bi med tem opraviлом naleteli na nepremagljive težave, a ostanimo pri teoriji. Skozi središče Zemlje torej zvrta-mo predor in poskrbimo, da so stene predora primerno ohlajene. Eno ustje predora je v Novi Zelandiji, drugo pa v Španiji. Najbrž se vsi zavedamo, da nimamo ustrezne cevi, ki bi zdržala tlak, ki ga povzroča tekoča sredica Zemlje; za našo cev bi bila usodna tudi temperatura. Kaj bi se torej zgodilo z jabolkom, ki bi ga nad rovom spustil kmet iz Nove Zelandije? Poleg razmeroma hladnega rova imejmo v mislih še dva privzetka. Pri prvem gre za to, da zanemarimo upor zraka. Po drugi strani pa tudi zanemarimo, da se Zemlja vrti okoli navidezne osi. Zakaj je to potrebno, bomo povedali v nadaljevanju.

Spuščeno jabolko ne bo padalo tako, kot napovedujejo enačbe prostega pada. Gravitacijski pospešek pod Zemljo je manjši. Privlak povzročajo sicer tako deli Zemlje, ki so v zemeljski lupini nad jabolkom, kot tudi tisti, ki so v krogli pod padajočim sadežem. Z malce zahtevnejšo matematiko se da pokazati, da je celotni prispevek delov zemeljske lupine nad jabolkom natančno enak nič. Vsi deli ga sicer privlačijo, a ker je vektorska vsota teh sil enaka 0, jabolko privlaka ne občuti (slika 1). Ali ga te privlačne sile, ki delujejo v različne smeri, torej skušajo raztrgati? Če bi nekatere delovale le na pecelj in druge na sadež, bi se to morda zgodilo. V resnici pa delujejo na vsak proton, nevtron in elektron in elektron v vseh smereh, tako da pecelj in sadež brez natezanja lepo ostaneta skupaj.



Slika 1. Jabolko je padlo že kar globoko proti središču Zemlje. Privlačijo ga vsi deli našega planeta. Vektorska vsota privlačnih sil tistih delov, ki so od središča bolj oddaljeni kot jabolko, pa je enaka nič.

Denimo, da je jabolko prepotovalo že polovico poti do središča Zemlje. Po gravitacijskem zakonu bi zaradi manjše oddaljenosti težišč teles sedaj bila v igri kar štirikrat večja sila. Ker pa je potrebno upoštevati le maso, ki je pod jabolkom, je privlak osemkrat manjši. Masa (homogene) krogle je sorazmerna s tretjo potenco polmera. Pri polovičnem polmeru je masa tako le osmino prvotne mase. Ker je $8 : 4$ enako dve, je privlak na polovici polmera dvakrat manjši. Gravitacijski pospešek se torej linearno večja z oddaljenostjo od središča Zemlje, kadar smo pod površjem našega planeta. Hitrost jabolka ne bo konstantno naraščala, pač pa bo zaradi manjšega gravitacijskega pospeška prirastek hitrosti vse manjši.

Zaradi simetrije in izkušenj z metom navzgor ni težko uganiti, da bo let od središča Zemlje naprej ravno nasprotno dogajanje, kot je bilo padanje navzdol. Še vedno pa ostaja odprto vprašanje, kako izračunati čas potovanja jabolka. Enačbe, ki jih poznamo iz šolskega zvezka, niso prave, saj je tam v igri konstantni pospešek. Ena možnost je, da pot razdelimo na manjše odseke in znotraj vsakega odseka privzamemo, da je pospešek konstanten. Obilo izračunov, ki nas čaka na tej poti, naj prevzame kar računalnik.

Jabolko začne padati z gravitacijskim pospeškom $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Opazujemo prvi kilometer padanja. Iz enačbe

$$v^2 = 2ax$$

izračunamo, da je bila povprečna hitrost med tem padanjem enaka

$$\bar{v} = \frac{0 + \sqrt{2ax}}{2}$$

in od tod dobimo čas tega preleta, saj vemo, da je pot 1 km. Zgodba se nadaljuje z naslednjim kilometrom, pri katerem pa je gravitacijski pospešek nekoliko manjši, saj smo že bolj blizu središča Zemlje. Privzamemo, da je tudi sedaj pospešek konstanten, a seveda manjši: $g = 9,8 \cdot (6399/6400) \text{ m/s}^2$. Pri drugem kilometru padanja seveda upoštevamo, da začetna hitrost ni enaka 0, vse ostalo pa izračunamo podobno kot prej.

Odprimo torej delovni list v Excelu in zapišemo naslednje količine in vrednosti:

	A	B	C	D	E	F
1	delta x					
2	1000					
3						
4	x	v	g	delta t	t	t [min]
5	0	0	9,8	0	0	0
6						

Slika 2. Delovni list v Excelu z zapisanimi količinami in vrednostmi. Enota je zapisana le tam, kjer ne gre za uporabo osnovnih enot; drugod je prav zato opuščena.

Ukaze zapišemo v šesto vrstico. V celico A6 tako spada: $=A5 + \$A\2 . S tem bomo intervale potovanja povečevali za izbrani interval (delta x), ki ga lahko pozneje spremenimo in se bo tabela posodobila. Zaenkrat smo izbrali 1000 metrov.

V celico B6 spada hitrost ob koordinati x, ki je v stolpcu A. Z enačbo to zapišemo:

$$v_{kom} = \sqrt{v_{kom}^2 + 2ax} ,$$

pri enačbi za Excel pa upoštevamo, da se pospešek spreminja. V celico B6 zapišemo:

$$=SQRT(B5^2 + 2 * C5 * \$A\$2).$$

Ugotovili smo, da pospešek linearno raste z oddaljenostjo od središča Zemlje. Na površju je enak $9,8 \text{ m/s}^2$, do središča Zemlje pa pade na nič. V stolpcu C bodo izračunani pospeški. V celico C6 zapišemo:

$$=\$C\$5 * (6400000 - A6) / 6400000.$$

Čas, ki ga porabi jabolko za prelet izbranega intervala, izračunamo tako, da premik delimo s povprečno hitrostjo. To spada v celico D6. Excel prebavi zapis v taki obliki:

$$=A\$2/((B6+B5)/2)$$

V stolpcu E bo celotni čas, zato le seštevamo, kar je v stolpcu D in v celici nad izbrano celico stolpca E. V celico E6 zato zapišemo:

$$=D6+E5.$$

Morda pa si ta čas izpisujemo še v minutah, zato v sosednjo celico šeste vrstice še dodamo: =E6/60.

Sedaj le še šesto vrstico označimo in potegnemo izračun do 6405. vrstice in pred nami so rezultati. Hitrost, ki jo doseže jabolko, je (zaokroženo) 7,9 km/s, čas pa 21 minut. Španska izpostava novozelandskega podjetja bo jabolko prejela čez 42 minut. Če pa ga ne bodo uspeli ujeti, bo jabolko padlo nazaj in do rok novozelandskega kmeta se bo vrnilo po 84 minutah od začetka padanja. Pozornemu bralcu, ki je pri pouku že obravnaval satelite, zvenita dve izmed tu navedenih vrednosti zelo domače.

Pa se podajmo še po drugi poti. Res je, da smo pri kinematiki v prvem ali drugem letniku srednje šole z enačbami obravnavali le gibanja s konstantnim pospeškom, toda že v tretjem dijaki spoznajo tudi gibanje, pri katerem pospešek ni konstanten. Gre za nihanje, natančneje povedano, sinusno nihanje. Pri poglavju o nihanju najprej opazimo, da se senca enakomerno krožečega telesa (pravokotna projekcija na zaslon) giblje natančno tako kot nihajoče telo. Ker pa znamo zapisati enačbe za gibanje sence krožečega telesa, so to hkrati kar enačbe za gibanje nihajočega telesa.

Iz njih ugotovimo, da za vsak trenutek velja zveza med odmikom in pospeškom:

$$a = -\omega^2 x$$

kjer je

$$\omega = \frac{2\pi}{t_0}$$

Pospešek je torej sorazmeren z odmikom in kaže vedno proti ravnovesni legi. Z upoštevanjem Hookovega zakona in drugega Newtonovega zakona smo s tretješolci izpeljali enačbo za nihajni čas nihala na vijačno vzmet:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Kadar imamo opravka s silo, ki je sorazmerna z odmikom in kaže vselej proti ravnovesni legi, bo pri prestavitvi tega telesa iz ravnovesne lege prišlo do sinusnega nihanja. V primeru Zemlje sicer nimamo nobene vzmeti, a sila teže je sorazmerna z odmikom od ravnovesne lege, ki je središče Zemlje, zato bo tudi tokrat v igri sinusno nihanje. Še z

enačbo zapišimo, kako se spreminja sila na telo, ki se oddaljuje od središča Zemlje, a je še vedno pod površjem našega planeta:

$$F = mg \frac{x}{k}$$

Pri tem je x oddaljenost od središča Zemlje, R pa polmer Zemlje. Enačbo primerjamo s Hookovim zakonom:

$$F = kx$$

in ugotovimo, da na telo v rovu skozi Zemljo deluje gravitacija kot nekakšna vzmet s koeficientom:

$$F = m \frac{g}{R}$$

Zato bo nihajni čas enak:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Ker poznamo enačbe za odmik, hitrost in pospešek pri sinusnem nihanju, amplituda pa je v našem primeru kar enaka polmeru Zemlje, zmoremo po poti, ki je primerna za tretješolce, še hitreje, z manj računanja in bolj natančno odgovoriti na zastavljeno vprašanje o potovanju jabolka. Tudi po tej poti pridemo do rezultata, da bo jabolko potovalo skozi naš planet 42 minut.

Bodimo še malo realisti in malo sanjači. Kitajska je tudi pomembno tržišče (realisti), zato bo Nova Zelandija naredila še en predor (sanjači) do Kitajske. Ker tokrat predor ne bo navpičen, jabolka ne bodo padala, pač pa se bodo kotalila. Obtočeno sadje seveda ne spada na trgovske police! Zato bodo izdelali proggo, po kateri se bodo brez trenja in zračnega upora zapeljali vagončki jabolok vse do Kitajske. Kolikšnen pa bo čas potovanja do Kitajske? Pot je vsekakor krajša, je pa v igri tudi manjši pospešek. Upoštevati moramo le tisto komponento pospeška, ki je vzporedna s tirom. Postopek prepuščam kar bralcem. Lahko izberete pot z Excelom, ki jo ubere drugošolec, na cilj pa vas privede tudi pristop za tretješolca. Kateri prispevek bo prevladal, krajša pot ali manjši pospešek?

ŠE O ZRAKU IN DRUGI TEŽAVI

Le za korak se približajmo realizmu: dovolimo, da je v našem predoru tudi zrak. Naj bo gostota zraka kar konstantna in enaka gostoti na površju Zemlje. Jabolko bo že po kakšnem kilometru doseglo največjo hitrost pri svojem letu. Nekaj pod 50 m/s bi bila. Od tam naprej pa se bo hitrost zelo počasi manjšala. Sila teže in sila upora zraka sta namreč v ravnovesju. Ker pa se prva zaradi vse manjšega gravitacijskega pospeška manjša, postane sicer nadvse majhna rezultanta teh dveh sil obrnjena navzgor in hitrost se zelo počasi

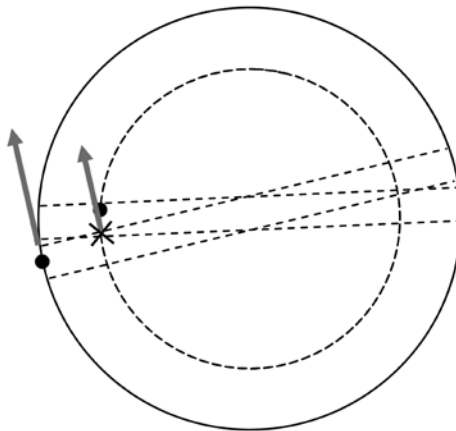
zmanjšuje. Kaj dosti dlje od središča Zemlje jabolko ne pride, potem pa okoli težišča malce zaniha gor in dol. Skratka, v Španiji bi zaman čakali na sadež.

Druga težava je povezana z vrtenjem Zemlje. Nova Zelandija se giblje z obodno hitrostjo okoli 350 m/s. Tolikšna je tudi hitrost jabolka, ki zato glede na površje miruje. Tudi ustje predora se giblje s to hitrostjo. Hitrost ostalih delov predora pa se proti središču Zemlje linearno zmanjšuje do nič (slika 3). Da bo račun lažji in skica bolj razumljiva, predstavimo za hip Novo Zelandijo kar na ekvator; obodna hitrost je zato 463 m/s.

Denimo, da je premer okroglega predora 30 cm, premer jabolka pa naj bo 10 cm. Upora zraka ne upoštevamo. Med steno predora in jabolkom je torej 10 centimetrov. Jabolko spustimo točno na sredini preseka ustja predora in se vprašamo, kje se nahaja čez 5 sekund. (Zaradi lepših števil naj bo $g = 10 \text{ m/s}^2$.) Jabolko bo že 125 m globoko. V tem času je prepotovalo tudi 2315 metrov v smeri, ki jo na sliki 3 označuje vektor hitrosti ustja predora. Izbrana točka predora, ki je označena s križcem, ima manjšo obodno hitrost, saj je za 125 metrov manj oddaljena od središča Zemlje:

$$v = 463 \text{ m/s} \frac{6399875}{6400000} = 462,99 \text{ m/s}$$

To pomeni, da se je v petih sekundah premaknila le za 2314,95 metra. Težišče jabolka je tako že 5 centimetrov oddaljeno od geometrijske osi predora. Do bližnje stene manjka le še 5 cm. Ni težko uganiti nadaljevanja. Prav kmalu bo jabolko zadelo to steno in to bi seveda bistveno vplivalo na padanje, saj ne bo šlo le ze en trk.



Slika 3. Zemljo opazujemo z južnega pola, Nova Zelandija je začasno predstavljena na ekvator. Čeprav je bilo jabolko spuščeno v sredini predora, se je kmalu zaletelo v steno. Vektorja označujeta trenutno hitrost ustja predora in hitrost izbrane točke (križec) v predoru. Na zasukani Zemlji vektorja hitrosti nista narisana.

Vse to je povsem v skladu z Newtonovimi zakoni: za spremembo hitrosti je potrebna sila, sicer bo hitrost (v našem primeru gre za vodoravno komponento hitrosti, navpična se znatno spreminja zaradi sile teže) ves čas enaka. Sila stene predora bo poskrbela, da se bo vodoravna komponenta hitrosti jabolka do središča Zemlje zmanjšala na nič.

Pojav v fiziki opišemo s Coriolisovo (sistemsko) silo. Več o tej sili in njenih znatnih učinkih na spremembo smeri gibanja zračnih mas in morskih tokov pa bralci lahko preberejo prav v tej številki revije.

Druge težave bi se otreli le s predorom, ki bi povezoval severni in južni tečaj. Ker pa se s tem še ne bi znebili ostalih ovir (temperatura, tlak, upor zraka), je izvedba neprimerena tudi za financiranje iz sklada najbolj rizičnega kapitala. Da o neprijetnem prevozu do tečaja in od njega sploh ne govorimo.

ZAKLJUČEK

Dejstvo je, da so bila jabolka pojedena zelo daleč od drevesa, v resnici kar predaleč. (Po tonu sestavka bralec že sluti, da si omenjenih jabolk predvsem iz naravovarstvenih vzgibov ni privoščil pisec teh vrstic.) Ker je brezplačni prevoz le teoretično uresničljiv, je tolikšno prevažanje sadja sporno z vidika trajnostnega razvoja. Smo res brez moči? Ne, saj nam tudi trgovci priznavajo, da je kupec kralj. V resnici prav mi s svojimi nakupi odločamo, katero sadje bo trgovec naročal. Če novozelandskih jabolk ne glede na morebitne popuste ne kupimo, bo trgovec presneto dobro premislil, kdaj bo naslednjič naročil neeksotične sadeže iz eksotičnih krajev. Bralce seveda prosim, da me ne prijavijo Svetovni trgovinski organizaciji. S pozivom k bojkotu blaga iz ene države sem se prav gotovo pregrešil zoper njena načela o prosti trgovini ...¹

¹ Poziv v članku je mnenje avtorja in ne izraža nujno stališča uredništva oziroma izdajatelja, pa tudi ne institucije, kjer je zaposlen ...