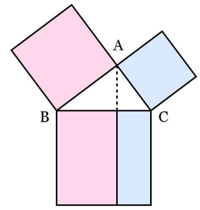


6

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

PRESEK LETNIK 43 (2015/2016) ŠTEVILKA **6**

PRESEK

- → PITAGOROV IZREK
- → ARHIMEDOVA KVADRATURA PARABOLE
- → VEČKRATNI ODBOJI SVETLOBE NA KONKAVNIH ZRCALIH
- → NALOGE ASTRONOMSKE OLIMPIJADE
- → PODATKOVNA STRUKTURA KOPICA

ISSN 0351-6652

9 770351 665364

MATEMATIČNI TRENUTKI

Dodajanje gub

→ Ne boste verjeli, nekaterim ljudem so všeč celo gube!

Gube, na primer na koži, na blagu in na plastičnih ovitkih, nastanejo, ker raztegnjeni materiali zavzamejo obliko z minimalno prožnostno energijo. Pri preučevanju gub uporabljamo geometrijo in parcialne diferencialne enačbe. Rezultati raziskav pomagajo tudi pri razumevanju drugih pojavov, na primer pri razumevanju obnašanja tankih slojev, cvetenja rož in, v primeru na naši sliki, pri proučevanju možnosti sprememb oblike teles med letom, ki bi izboljšale aerodinamičnost leta.

Raziskave gubanja temeljijo na medsebojnih vplivih tršega zunanjega in mehkejšega notranjega sloja, podobno kot je to primer pri naši koži. Do sedaj je kazalo, da so modeli gubanja odvisni od zelo veliko parametrov. Nedavno pa je skupina raziskovalcev presenetljivo odkrila, da sta pri sferičnih ploskvah pomembna le dva parametra: razmerje med ukrivljenostjo notranjega sloja in debelino zunanjega sloja ter tlak na zunanji sloj. Večja ukrivljenost in manjši tlak povzročita manjše udore, ki so razporejeni v šestkotnem kristalnem vzorcu. Manjša ukrivljenost in večji tlak pa povzročita oblikovanje brazd, ki so podobne prstnim odtisom. Skupina namerava proučiti tudi druge oblike ploskev. Njihovi rezultati bi lahko pomagali pri razlagi gubanja struktur vseh velikosti, od tistih mikroskopskih do struktur velikosti planetov.

Za več informacij si lahko preberete članek *Curvature-induced symmetry breaking determines elastic surface patterns*, ki je leta 2015 izšel v reviji *Nature Materials*.

SLIKA.
Dva primera gubanja tankega sloja na ukrivljenem substratu: sfera s kombinacijo udorov in brazd; torus s šestkotno razporejenimi udori.

× × ×

KOLOFON

→ **Presek**
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 43, šolsko leto 2015/2016, številka 6

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2015/2016 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1400 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Naslovnica kaže oblake v raznih odtenkih sive, od črne do bele. Sivo bravo oblakov pravzaprav enostavno pojasnimo, bolj zvito je vprašanje: zakaj so oblaki beli? Odgovor poiščite v prispevku o naravoslovni fotografiji. (foto: Aleš Mohorič)

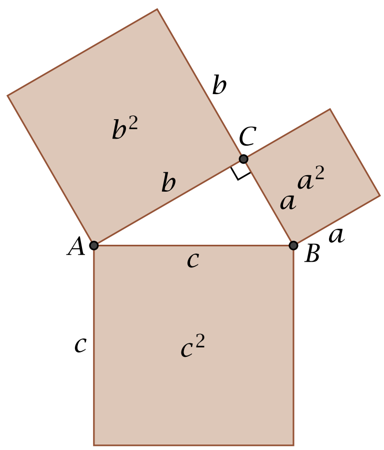
Pitagorov izrek

Aljoša Peperko in Janez Šter

→ **Pitagorov izrek je eden najslavnejših rezultatov antične matematike in se glasi:**

Izrek. Naj bo dan pravokotni trikotnik ABC in naj bo c dolžina njegove hipotenuze, a in b pa dolžini njegovih katet. Potem je ploščina kvadrata s stranico dolžine c enaka vsoti ploščine kvadrata s stranico dolžine a in ploščine kvadrata s stranico dolžine b. V matematičnih oznakah:

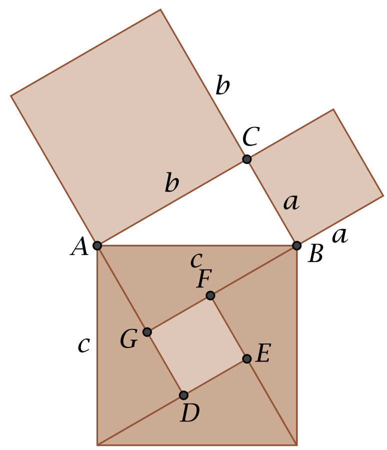
- $c^2 = a^2 + b^2$.



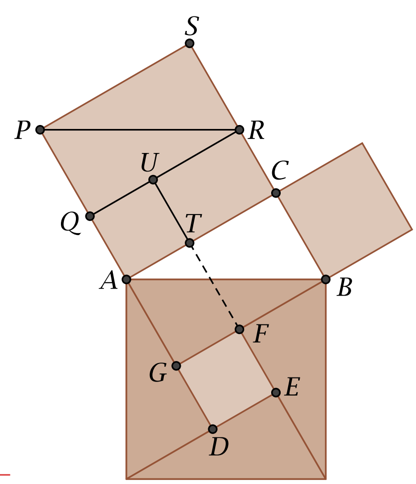
SLIKA 1.
Pitagorov izrek

Znanih je mnogo različnih dokazov Pitagorovega izreka, več kot sto izmed njih je zbranih na spletni strani [2]. Namen tega prispevka je predstaviti tri dokaze geometrijske narave. Ti dokazi sledijo iz aksiomov elementarne geometrije in za njih poznavanje algebrskih operacij, kot so seštevanje, odštevanje, množenje ali deljenje, ni potrebno. V vseh treh dokazih bomo brez škode za splošnost privzeli, da je b večje ali enako a (kot na sliki 1).

Dokaz 1. Kot kaže slika 2, v kvadrat s stranico dolžine c vrišemo štiri pravokotne trikotnike, skladne trikotniku ABC. Ker je vsota manjših dveh notranjih kotov trikotnika ABC pravi kot, se vrisani štirje trikotniki stikajo brez prekrivanja, kot nakazuje slika 2, oglišča vrisanih trikotnikov pa tvorijo nov manjši kvadrat $DEFG$.



SLIKA 2.



SLIKA 3.

Potrebno je torej premisliti, da je vsota ploščin vrisanih štirih skladnih trikotnikov in kvadrata $DEFG$ enaka vsoti ploščin kvadratov, narisanih nad katetama z dolžinama a in b. Slednje lahko zaključimo z naslednjim korakom, kot prikazuje slika 3.

V kvadrat nad kateto AC z dolžino b vrišemo dva pravokotna trikotnika PRS in RPQ, skladna prvotnemu trikotniku ABC. Ker sta dolžini stranic AP in DA enaki in sta dolžini QP in GA enaki, sta tudi dolžini QA in GD enaki. Torej lahko v pravokotnik $ACRQ$ vrišemo kvadrat $ATUQ$, ki je skladen kvadratu $DEFG$.

Zadošča torej le še premisliti, da je dvakratnik ploščine trikotnika ABC (ki je enak ploščini pravokotnika $AGBC$) enak vsoti ploščine pravokotnika $TCRU$ in ploščine kvadrata nad stranico BC. Dolžina daljice TC je enaka a. Torej lahko pravokotnik $AGBC$ razdelimo na kvadrat $FBCT$ z dolžino stranice a in na pravokotnik $AGFT$. Pravokotnika $AGFT$ in $TCRU$ pa sta skladna, saj imata stranici enakih dolžin. S tem je dokaz zaključen. ■

Opomba. Zaključni korak zgornjega geometrijskega dokaza je možno nadomestiti z naslednjim računskim zaključkom. Iz slike 2 sledi, da je ploščina kvadrata s stranico dolžine c enaka vsoti ploščin štirih trikotnikov, skladnih prvotnemu trikotniku ABC, in ploščine kvadrata z dolžino stranice $|DE| = b - a$. Torej je

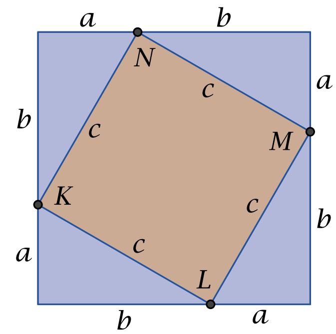
$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b-a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + b^2.$$

Ta alternativni računski zaključek dokaza je objavljen kot dokaz 3 v [2] in ga je prvemu avtorju tega članka v času študija predstavil dr. Damjan Kobal, za kar se mu avtor iskreno zahvaljuje. Geometrijska verzija zaključka dokaza je plod dela avtorjev tega članka.

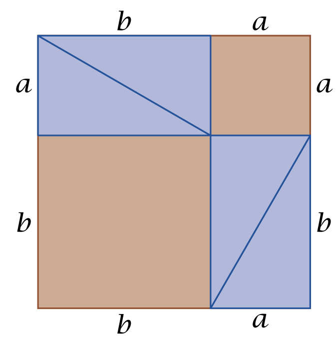
Naslednji dokaz je morda eden najbolj znanih geometrijskih dokazov Pitagorovega izreka in je na spletu opisan v [1] in kot dokaz 9 v [2].

Dokaz 2. Kvadrat s stranico dolžine $a + b$ razdelimo na dva načina. Najprej v tak kvadrat vrišemo štiri pravokotne trikotnike, skladne prvotnemu trikotniku ABC, kot je to predstavljeno na sliki 4.

Ker so ti trikotniki pravokotni in skladni, je štirikotnik $KLMN$ kvadrat s stranico dolžine c. Kvadrat s stranico dolžine $a + b$ pa lahko razdelimo tudi na naslednji način, kot to prikazuje slika 5.



SLIKA 4.
Prva delitev.

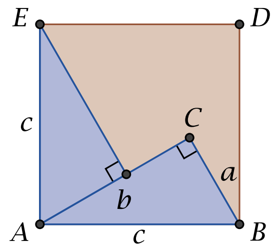


SLIKA 5.
Druga delitev kvadrata s stranico dolžine $a + b$.

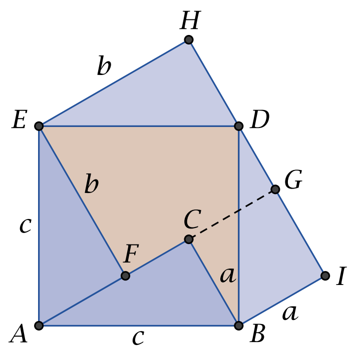
V nasprotni oglišči tega kvadrata vrišemo kvadrat z dolžino stranice b in kvadrat z dolžino stranice a. Znotraj prvotnega kvadrata ostaneta še dva pravokotnika s stranicama dolžin a in b, ki ju lahko razdelimo na štiri trikotnike, skladne trikotniku ABC. Iz primerjave slik 4 in 5 sledi, da je ploščina kvadrata z dolžino stranice c enaka vsoti ploščine kvadrata z dolžino stranice a in ploščine kvadrata z dolžino stranice b, kar zaključuje dokaz. ■

Tretji dokaz, ki ga bomo predstavili, je plod dela drugega avtorja pričujočega članka. Uporabljene ideje so podobne tistim v dokazu 2 iz [2].

Dokaz 3. Prvotnemu pravokotnemu trikotniku ABC obrišemo kvadrat $ABDE$ z dolžino stranice c. V ta kvadrat narišemo še en pravokotni trikotnik, skladen trikotniku ABC, kot prikazuje slika 6. Nato dorišemo še dva pravokotna trikotnika, skladna trikotniku ABC, kot prikazuje slika 7.



SLIKA 6.



SLIKA 7.

Skupna ploščina dveh trikotnikov, narisanih znotraj kvadrata $ABDE$, je enaka skupni ploščini dveh trikotnikov, narisanih zunaj kvadrata $ABDE$. Zato je ploščina kvadrata $ABDE$ s stranico dolžine c enaka vsoti ploščin kvadratov $EFGH$ in $BIGC$. Ker je dolžina stranice kvadrata $EFGH$ enaka b in je dolžina stranice kvadrata $BIGC$ enaka a, to dokazuje želeno. ■

Literatura

[1] E-um, 8. razred, *Geometrija v ravnini, Pitagorov izrek – dokaz*, `http://www.e-um.si/`, ogled 29. 1. 2016.

[2] Pythagorean Theorem, `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/`, ogled 29. 1. 2016.

× × ×

Nemogoč problem

Ivan Vidav

Peter je izbral dve naravni števili, večji od 1. Svojemu znancu Janezu je povedal, kolikšna je vsota teh števil, Mirku pa, kolikšen je produkt.

Mirko si ogleda produkt in telefonira Janezu: »Vem, kolikšna je tvoja vsota.«

Kmalu nato pa še Janez sporoči Mirku: »Tudi jaz vem, kolikšen je produkt.«

Ugani, kateri števili je izbral Peter, če izdamo, da je vsota večja od 21 in manjša od 31. Vnaprej seveda ne vemo, ali je Peter izbral različni ali enaki števili. Podobna toda precej težja pa je naslednja naloga:

Peter je izbral dve naravni števili, večji od 1. Svojemu znancu Janezu je povedal, kolikšna je vsota teh števil, Mirku pa, kolikšen je produkt.

Janez si ogleda vsoto in telefonira Mirku: »Ne vidim nobene možnosti, kako bi ti lahko določil vsoto.«

Toda glej, čez eno uro mu Mirko odgovori: »Vem, kolikšna je vsota.«

Kmalu nato pa še Janez sporoči Mirku: »Tudi jaz vem, kolikšen je produkt.«

Kateri števili je izbral Peter? Da bo naloga lažja, naj povemo, da vsota ni večja od 40. Vnaprej seveda ne vemo, ali je Peter izbral različni ali enaki števili.

Ta zanimiva naloga kroži zadnja leta na raznih srečanjih matematikov. Martin Gardner, ki jo je objavil v decembrski številki časopisa Scientific American, jo imenuje »nemogoč problem«, ker na videz v njem ni nobene informacije, ki bi omogočala reševanje. Omejitev, da vsota izbranih števil ni večja od 40, ni bistvena. Enako rešitev dobimo tudi v primeru, če vsota ni večja od 60, samo več dela je pri reševanju.

Bralec naj skuša rešiti najprej prvo, lažjo nalogo, nato pa naj se loti še druge.

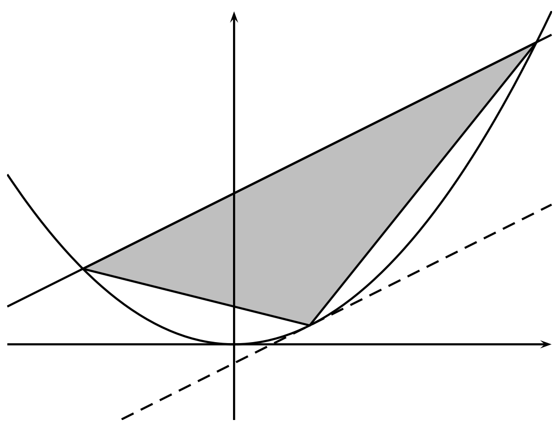
× × ×

Arhimedova kvadratura parabole

Marjan Jerman

Uvod

Starogrški matematiki so se intenzivno ukvarjali z vprašanji, kako danemu liku poiskati večkotnik z enako ploščino. Najbolj znan problem, ki se je veliko kasneje izkazal za nerešljivega, je, kako krogu poiskati ploščinsko enak kvadrat. Arhimed (287–212 pr. n. št.) je v pismu matematiku Dositeju pokazal, da je ploščina lika, ki ga od parabole odreže njena sekanta, enaka štirim tretjinam ploščine trikotnika, ki ima za osnovnico tetivo, za vrh pa točko na paraboli, v kateri je tangenta na parabolo vzporedna sekanti (glej sliko 1). Arhimedov rezultat je izjemen, sploh če se zavedamo, da mu je to uspelo več kot dve tisočletji pred odkritjem integralov.



SLIKA 1.
Ploščina lika, ki ga od parabole odreže sekanta, je enaka štirim tretjinam ploščine trikotnika, ki ima za osnovnico tetivo, za vrh pa točko parabole, v kateri je tangenta vzporedna sekanti.

Starogrški matematiki so na parabolo gledali kot na presek neskončnega stožca z eno od ravnin, ki je vzporedna neki tangentni ravnini stožca; to je, ravnini, ki se stožca dotika le vzdolž njegove tvorilke. Takšna predstava je Arhimedovo obravnavo še dodatno otežila. Da bi najpomembnejše ideje Arhimedovega dokaza približali bralcem Preseka, si bomo pomagali s koordinatnim sistemom, ki ga je šele mnogo kasneje izumil Rene Descartes (1596–1650). V primerno postavljenem koordinatnem sistemu ima vsaka parabola enačbo $y = Cx^2$, kjer je C realna konstanta. Zaradi enostavnejšega računanja bomo obravnavali le parabolo $y = x^2$.

Tangenta na parabolo

Najprej si brez pomoči odvoda poglejmo, kako najti enačbo tangente na parabolo. Bolj natančno, poiščimo enačbo tangente na parabolo $y = x^2$ v točki (x_0, x_0^2).

Ker gre tangenta skozi točko (x_0, x_0^2), je za primeren naklon k njena enačba enaka

- $y - x_0^2 = k(x - x_0)$.

Zato so skupne točke tangente in parabole rešitve enačbe

- $x^2 = k(x - x_0) + x_0^2$.

Ker se tangenta dotika parabole, mora imeti kvadratna enačba

- $x^2 - kx + kx_0 - x_0^2 = 0$

le eno dvojno ničlo, zato je njena diskriminanta

- $D = k^2 - 4(kx_0 - x_0^2) = k^2 - 4kx_0 + 4x_0^2 = (k - 2x_0)^2$

enaka 0. Tako smo pokazali, da je naklon tangente na parabolo $y = x^2$ v točki (x_0, x_0^2) enak $k = 2x_0$. Bralci, ki že poznajo pomen odvoda, lahko preverijo, da se rezultat ujema z vrednostjo odvoda $(x^2)' = 2x$ v točki x_0.

Tangenta, ki je vzporedna sekanti

Pred obravnavo se je Arhimed sklical na nekatere znane lastnosti parabole, ki sta jih dokazala že Evklid (365–275 pr. n. št.) in Aristej (390–320 pr. n. št.). Najpomembnejša pravi, da sta ordinata in abscisa točke na paraboli v kvadratnem sorazmerju. Nas bo zanimalo tudi, v kateri točki parabole je tangenta vzporedna sekanti skozi točki $A(a, a^2)$ in $B(b, b^2)$. Ker imata vzporedni premici enak naklon, iščemo tangento z naklonom

- $k = \dfrac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a.$

V prejšnjem razdelku smo pokazali, da je naklon tangente v točki (x_0, x_0^2) enak $2x_0$, zato mora biti

- $2x_0 = b + a \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}(a + b).$

S tem smo pokazali zanimiv rezultat, ki pravi, da je tangenta na parabolo vzporedna sekanti v točki $C\left(\frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$, ki leži pod razpoloviščem tetive, med točkama, kjer sekanta seka parabolo.

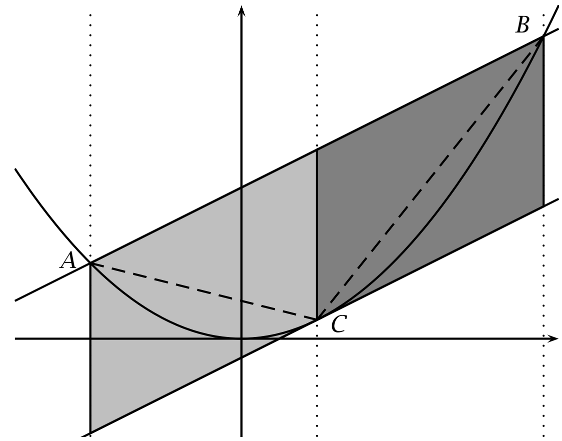
Metoda izčrpavanja ploščine

Ploščino odseka parabole $y = x^2$ s sekanto skozi točki $A(a, a^2)$ in $B(b, b^2)$ bomo izračunali tako, da bomo ta odsek zaporedoma tlakovali s čedalje manjšimi trikotnimi ploščicami, ki bodo v vsakem novem koraku pokrivale čedalje večji del odseka. Za največjo ploščico vzemimo trikotnik ABC.

Primerjajmo ploščino celotnega odseka in ploščino trikotnika ABC. Navpični premici $x = a$ in $x = b$ skupaj s tetivo AB in tangento skozi C oklepata paralelogram. Če ga v mislih razrežemo na dva kosa še z navpičnico $x = \frac{1}{2}(a + b)$ skozi točko C, vidimo, da je zaradi skladnosti ustreznih parov trikotnikov ploščina paralelograma dvakrat večja od ploščine trikotnika ABC. Hkrati je jasno, da je celoten odsek parabole vsebovan v tem paralelogramu. Zato lahko zelo grobo ocenimo, da trikotnik ABC pokriva vsaj polovico ploščine paraboličnega odseka.

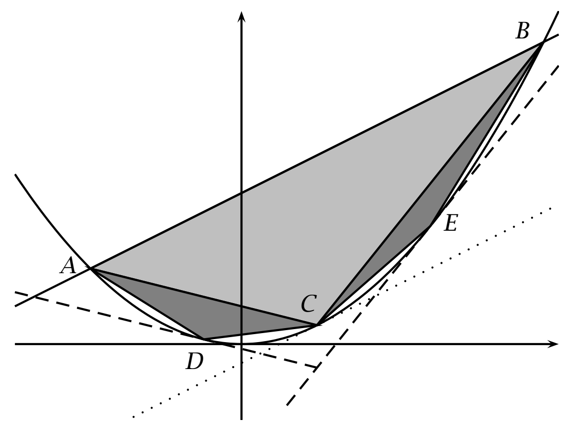
Nadaljujmo z včrtovanjem novih, manjših trikotnikov, ki bodo pokrili še nepokriti del paraboličnega odseka.

Najprej narišimo dva nova trikotnika z osnovnicama AC in CB ter vrhovoma v točkah D in E, kjer



SLIKA 2.
Včrtani trikotnik pokriva več kot polovico ploščine odseka parabole.

je tangenta na parabolo vzporedna premicama AC in CB (glej sliko 3). Premislek od prej nam pove, da smo s tem pokrili več kot polovico še nepokritega dela. Zato je ostala nepokrita še največ četrtina odseka.



SLIKA 3.
Zaporedno tlakovanje odseka parabole

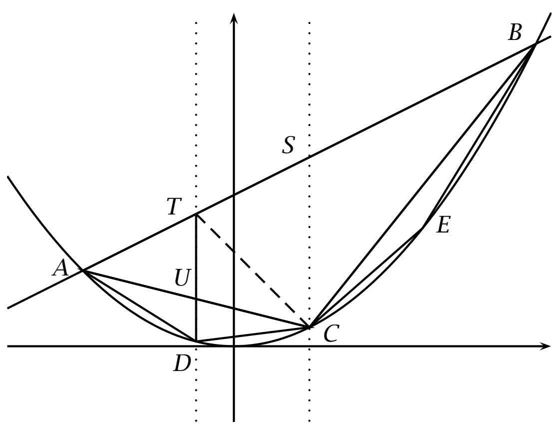
Nato narišimo še štiri nove trikotnike z osnovnicami AD, DC, CE in EB ter vrhovi v točkah parabole, kjer je tangenta vzporedna premicam AD, DC, CE in EB. Enak sklep kot prej nam pove, da je del odseka, ki ga ne pokriva sedem pravkar narisanih trikotnikov, manjši od osmine ploščine celotnega odseka.

S postopkom nadaljujemo. Vsakič na enak način kot prej dorišemo dvakrat toliko trikotnikov kot v prejšnjem koraku in ploščino nepokritega dela zmanjšamo vsaj za polovico. Zato lahko z dovolj potrpežljivim včrtovanjem novih in novih trikotnikov poljubno zbližamo ploščino odseka parabole ter vsoto ploščin včrtanih trikotnikov.

Ploščine manjših trikotnikov

V tem razdelku bomo dokazali, da je ploščina vsakega od trikotnikov ADC in CEB osemkrat manjša od ploščine trikotnika ACB.

Navpičnica $x = \frac{1}{2}(a+b)$ skozi C naj seka sekanto AB v točki S (glej sliko 4). Ker je navpičnica skozi C enako oddaljena od navpičnic $x = a$ in $x = b$ skozi A in B, leži točka S na sredini daljice AB. Trikotnika SAC in BSC imata enako dolgi osnovnici $AS = SB = \frac{1}{2}AB$ in isto višino, zato imata enako ploščino. Tako bo dovolj, če pokažemo le, da je ploščina trikotnika ADC enaka četrtini ploščine trikotnika ACS.



SLIKA 4.
Ploščina manjšega trikotnika ADC je enaka osmini ploščine večjega trikotnika ACB.

Sedaj potegnimo navpičnico skozi D, ki seka sekanto AB v točki T. Enak premislek kot prej nam pove, da točka T leži na sredini daljice AS. Trikotnika ACT in TCS imata enako dolgi osnovnici $AT = TS = \frac{1}{2}AS$ in isto višino, zato sta ploščinsko enaka in pokrivata vsak polovico ploščine trikotnika ACS. Zato je dovolj pokazati, da je ploščina trikotnika ADC enaka polovici ploščine trikotnika ACT.

Daljica DT naj seka daljico AC v točki U. Trikotnika ADC in ACT imata isto osnovnico AC, njuni višini pa sta v razmerju $DU : UT$. Dokaz bo tako končan, ko pokažemo, da je $UT = 2\,DU$.

Pomagajmo si s koordinatnim sistemom. Ker točke D, U in T ležijo na isti navpičnici

- $$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a+b}{2}\right) = \frac{3a+b}{4},$$

sta dolžini daljic UT in DU enaki razliki ordinat ustreznih točk.

Točka D leži na paraboli $y = x^2$, zato ima ordinato enako

- $$y_D = \frac{(3a+b)^2}{16}.$$

Točka T leži na sekanti AB, katere naklon $k_{AB} = a+b$ smo že izračunali. Enačba sekante AB je

- $$y - a^2 = (b+a)(x-a).$$

Zato je ordinata točke T enaka

- $$y_T = (a+b)\left(\frac{3a+b}{4} - a\right) + a^2 = \frac{b^2+3a^2}{4}.$$

Točka U leži na premici skozi A in C z naklonom

- $$k_{AC} = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - a^2}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{b^2+2ab-3a^2}{2(b-a)}$$

in enačbo

- $$y - a^2 = \frac{b^2+2ab-3a^2}{2(b-a)}(x-a).$$

Ordinata točke U je zato enaka

- $$y_U = a^2 + \frac{b^2+2ab-3a^2}{2(b-a)}\left(\frac{3a+b}{4} - a\right) = \frac{5a^2+2ab+b^2}{8}.$$

Krajši računa nam dá dolžini daljic UT in DU:

- $$y_T - y_U = \frac{(a-b)^2}{8},$$
- $$y_U - y_D = \frac{(a-b)^2}{16}.$$

Res velja $UT = 2\,DU$, to pa smo želeli pokazati.

Ker je trikotnik CEB dobljen na enak način kot trikotnik ADC, je tudi njegova ploščina enaka četrtini ploščine trikotnika BSC in zato enaka osmini ploščine trikotnika ACB.

Vsota ploščin trikotnikov

Recimo, da je ploščina trikotnika ACB enaka S. V vsakem koraku tlakovanja dodamo dvakrat več novih trikotnikov kot v prejšnjem koraku, ploščina vsakega novega trikotnika pa je osemkrat manjša. Premislili smo že, da je po dovolj korakih vsota ploščin vseh tlakovcev poljubno blizu ploščini paraboličnega odseka. Po n korakih je vsota ploščin trikotnikov enaka

$$\begin{aligned} S_n &= S + 2 \cdot \tfrac{1}{8}S + 2^2 \cdot \tfrac{1}{8^2}S + 2^3 \cdot \tfrac{1}{8^3}S + \\ &\quad \ldots + 2^{n-1} \cdot \tfrac{1}{8^{n-1}}S \\ &= S\left(1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + \ldots + (\tfrac{1}{4})^{n-1}\right). \end{aligned}$$

To je vsota končnega geometrijskega zaporedja s prvim členom S in kvocientom $\frac{1}{4}$, od koder sledi

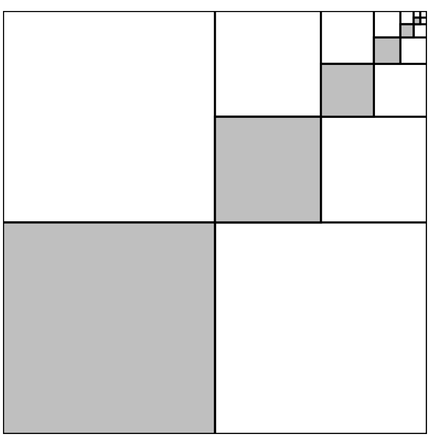
$$S_n = S\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \tfrac{4}{3}S\left(1-\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right).$$

Ko število korakov večamo čez vse meje, postaja potenca $(\frac{1}{4})^n$ poljubno majhna, zato je ploščina paraboličnega odseka enaka

$$S_\infty = \tfrac{4}{3}S.$$

To pa je natanko Arhimedov rezultat.

Arhimed še ni poznal geometrijskih vrst in je zgornjo vsoto izračunal s pomočjo naslednjega trika:



SLIKA 5.
Geometrijska interpretacija vsote geometrijske vrste s kvocientom $\frac{1}{4}$

Kvadrat s stranico 1 razrežimo na štiri enake kvadratne dele (glej sliko 5). Vsak del ima ploščino $\frac{1}{4}$. Postopek ponovimo z manjšim zgornjim desnim kvadratkom, ki ga na enak način razdelimo na še manjše kvadratke s ploščino $\frac{1}{4^2}$. V nadaljevanju postopka na diagonali osnovnega kvadrata dobimo čedalje manjše kvadrate. Vsakemu diagonalnemu kvadratku pripadata kvadratka z enako ploščino, eden od njiju leži nad njim, drugi pa na njegovi desni strani.

Zato si lahko predstavljamo, da ploščino največjega kvadrata izčrpamo z manjšimi kvadrati na naslednji način.

Najprej vzamemo vse tri začetne polovične kvadratke razen zgornjega desnega. Nato manjkajoči zgornji desni kvadratek pokrijemo s tremi manjšimi ploščinsko enakimi kvadratki, preostali kvadratek spet s tremi manjšimi in tako naprej. Površno povedano bomo v neskončno korakih s trojicami čedalje manjših skladnih kvadratkov izčrpali ploščino celotnega osnovnega kvadrata. Drugače, ploščino 1 osnovnega kvadrata lahko razbijemo na neskončno vsoto ploščin čedalje manjših kvadratkov takole:

$$1 = 3\tfrac{1}{4} + 3\tfrac{1}{4^2} + 3\tfrac{1}{4^3} + \ldots$$

Od tod dobimo vsoto iskane neskončne geometrijske vrste

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{4^3} + \ldots$$

Primerjava rezultata z modernim izračunom

Bralci, ki jih je prispevek pritegnil in že poznajo pomen integrala, lahko Arhimedov rezultat potrdijo tako, da najprej izračunajo ploščino S trikotnika z oglišči $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ in $C(\frac{1}{2}(a+b), (\frac{1}{2}(a+b))^2)$, nato pa izračunajo ploščino območja med parabolo $y = x^2$ in njeno sekanto skozi točki A in B s pomočjo integrala

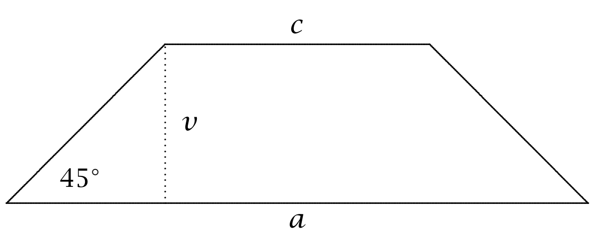
$$\int_a^b \left(((a+b)(x-a)+a^2)-x^2\right)dx.$$

× × ×

Naloga

Marko Razpet

Otrok se igra s štirimi koščki kartona, ki imajo vsi obliko enakokrakega trapeza z notranjim kotom 45° ob daljši osnovnici. Ve, da imajo vsi trapezi enako ploščino, ki se izraža v kvadratnih centimetrih z naravnim številom, ki ne presega 30, in da se vse dolžine osnovnic izražajo v centimetrih, prav tako z naravnimi števili. Trapezi imajo različne višine.



SLIKA 1.

Pomagajte otroku izračunati osnovnici in višino vsakega trapeza posebej.

Rešitev

Privzamemo lahko, da za osnovnici a in c vsakega trapeza velja relacija $a > c$, pri čemer sta a in c naravni števili. Višina trapeza je očitno $v = (a - c)/2$, srednjica pa $s = (a + c)/2$, zato je njegova ploščina $P = sv = (a + c)(a - c)/4$, ki je naravno število. Ta ploščina je za vse štiri trapeze enaka.

Hitro spoznamo, da sta števili a in c lahko hkrati sodi ali pa hkrati lihi. V nasprotnem primeru bi bili števili $a + c$ in $a - c$ lihi, kar bi nasprotovalo enačbi $(a + c)(a - c) = 4P$, saj bi bila njena leva stran liho, desna pa sodo število.

Torej morata biti števili a in c hkrati sodi ali pa hkrati lihi. To seveda pomeni, da sta $a + c$ in $a - c$ sodi števili, in zato lahko zapišemo enačbo

$$\frac{a - c}{2} \cdot \frac{a + c}{2} = P,$$

pri čemer sta $m = (a - c)/2$ in $n = (a + c)/2$ naravni števili, ki sta v relacijah $m < n$ in $mn = P$. S seštevanjem in odštevanjem pa takoj dobimo: $a = n + m$ in $c = n - m$.

To pomeni, da moramo poiskati tako naravno število P ($P \leq 30$), ki ga je mogoče razstaviti na dva faktorja m in n ($m < n$) na štiri načine. Po zapovrstnem pregledu najdemo število $P = 24$, za katero je $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Rešitev naloge je dana v preglednici:

m	n	a	c	v
1	24	25	23	1
2	12	14	10	2
3	8	11	5	3
4	6	10	2	4

TABELA 1.

Poiščite naslednje naravno število P, ki ga je mogoče prav tako kot 24 razstaviti na štiri načine na dva faktorja. Ponovite nalogo za najdeni P.

Večkratni odboji svetlobe na konkavnih zrcalih

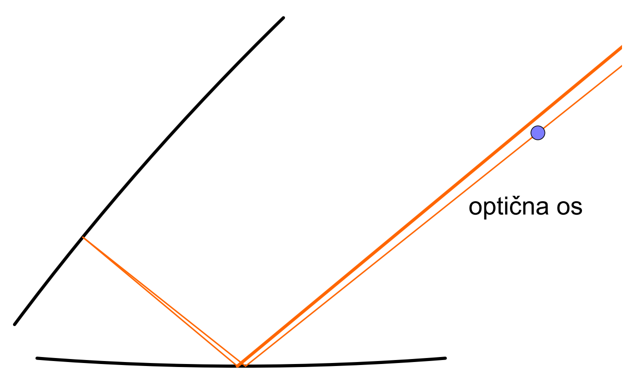
Andrej Likar in Nada Razpet

Pravo (realno) sliko neke točke, iz katere izvira svetloba, tvorijo žarki, ki se po odboju na zrcalih ali lomu v lečah sekajo. Sliko lahko opazujemo z očmi ali jo prestrežemo z zaslonom. Z očmi seveda vidimo tudi navidezno (virtualno) sliko, a nas realna slika nemalo preseneti, saj čudežno »lebdi« v prostoru in prav mika nas, da bi se je dotaknili. Iluzija je toliko bolj prepričljiva, če sliko opazujemo hkrati z obema očesoma. Navideznih slik v ravnem zrcalu smo tako vajeni, da nam ne pride na misel, da bi segli po njih. Zakrivljenih konkavnih zrcal pa nismo vajeni, zato iluziji prave slike kaj hitro podležemo.

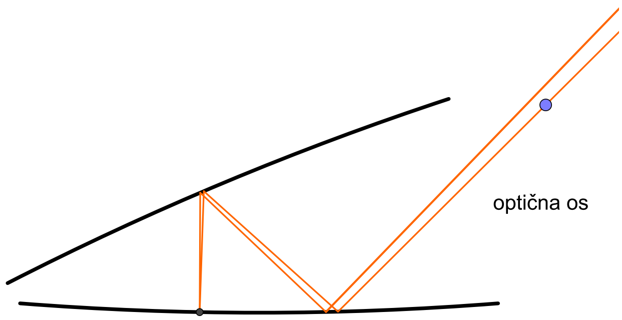
Da prepričljivo vidimo pravo sliko z obema očesoma hkrati, potrebujemo dovolj veliko in primerno zakrivljeno zrcalo. Do takih zrcal pa ni lahko priti. Ker morajo biti tudi optično dovolj kakovostna, njihova cena strmo narašča z velikostjo. V šolah, kjer je zrcalo le motivacijski pripomoček, smo torej vezani na kozmetična zrcala, ki so namenjena podrobnemu ogledu obraza, seveda v navidezni povečani sliki. Sicer niso draga, a niso prav velika, njihova goriščna razdalja pa je za naš namen pogosto prevelika, okrog polovice metra ali več. Prava slika tako nastane predaleč od zrcala in je zaradi neustrezne optične kakovosti površin za vsako oko malo drugače popačena. Sliki v levem in desnem očesu nista povsem usklajeni, kar zelo oteži opazovanje. Slike tudi ni lahko najti, še posebno nevajenemu opazovalcu. Pri takih zrcalih si pomagamo z večkratnimi odboji na dveh zrcalih, ki ju postavimo s školjčno lego, torej lego, ki spominja na povezani lupini školjk. Večkratni odboji skrajšajo goriščno razdaljo do mere, ko lahko pravo sliko udobno opazujemo z obema očesoma hkrati in s tem ustvarimo prepričljivo iluzijo. Pri tem optične napake posameznih zrcal skoraj ne popačijo slike. Taka »školjka« je izvrstno motivacijsko učilo, omogoča pa tudi nestandardno in ne prav lahko konstrukcijo resničnih, pa tudi navideznih slik.

Število odbojev je odvisno od zaprtosti zrcal. Odprti zrcali omogočita tri odboje, dva na spodnjem zrcalu in enega na zgornjem. Na sliki 1 smo izbrali žarek, ki se odbije sam vase, torej določa optično os obeh zrcal pri trikratnem odboju. Zaradi preglednosti smo vpadni žarek malce izmaknili iz optične osi.

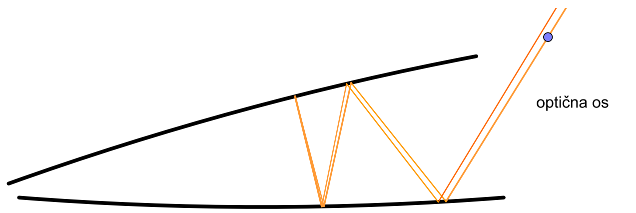
Bolj ko se zrcali zapirata, večkrat se svetloba odbije, preden pride do opazovalca. Na slikah 2 in 3 sta prikazani legi zrcal s petimi (tri na spodnjem in dva na zgornjem zrcalu) in sedmimi odboji (štiri na spodnjem in tri na zgornjem) za žarka blizu optičnih osi.



SLIKA 1.
Pri odprti legi zrcal se žarek iz točke trikrat odbije na zrcalih, in sicer dvakrat na spodnjem in enkrat na zgornjem. Po odbojih se vrne sam vase (zaradi preglednosti na sliki nekoliko mimo), tako določimo optično os zrcal pri takem odboju.



SLIKA 2.
Ko zrcali pripremo, je število odbojev večje, tu petkratno, trikratno na spodnjem zrcalu in dvakratno na zgornjem.

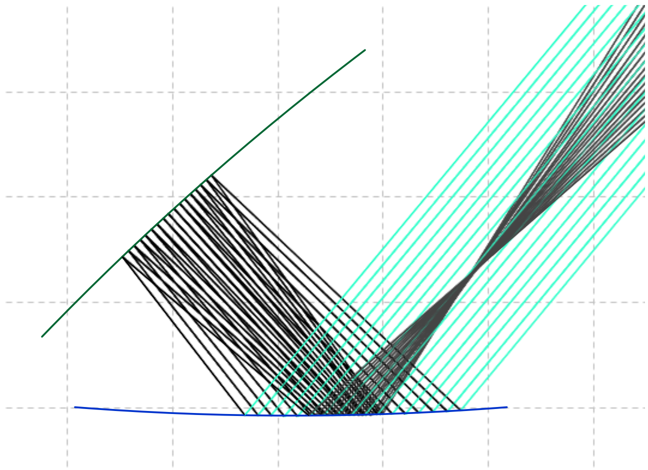


SLIKA 3.
Sliko po sedemkratnem odboju je še mogoče kar dobro opazovati.

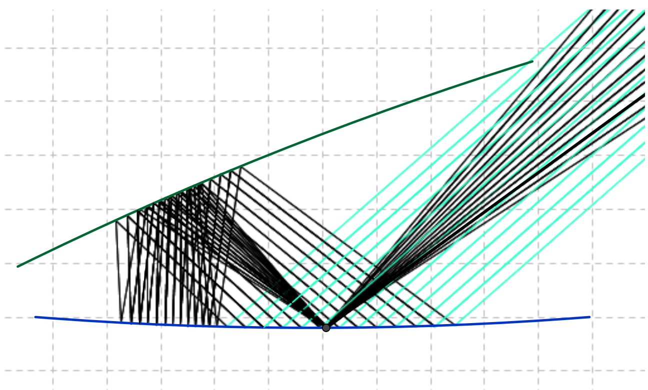
Devetih in še večkratnih odbojev pa ne moremo več prav dobro opazovati. Več ko je odbojev, krajša je tudi goriščna razdalja zrcalne školjke (glej sliki 5 in 6), kar pride prav pri opazovanju prave slike primernega predmeta, najpreprosteje kar lastnega prsta opazovalca.

Zapišimo še, kako določimo *gorišče* školjčne postavitve. Najprej pri školjčni postavitvi določimo optično os. Vemo, da se žarek, ki leži na optični osi, odbije sam vase. Za risanje žarkov smo uporabili program GeoGebra in s poskušanjem poiskali žarek, ki se po odboju od zrcal odbije sam vase. Take primere kažejo slike 1, 2 in 3. Zaradi preglednosti smo narisali žarek, ki je blizu optične osi. Pri poskusu z zrcali pa smo optično os poiskali z laserskim kazalnikom, ki je bil od zrcal močno oddaljen.

Žarki, ki so vzporedni z optično osjo, gredo po odboju skozi skupno točko, to je skozi gorišče. Narisati moramo torej snop žarkov, vzporednih z optično osjo, in poiskati presečišče odbitih žarkov. Primera sta na slikah 4 in 5.

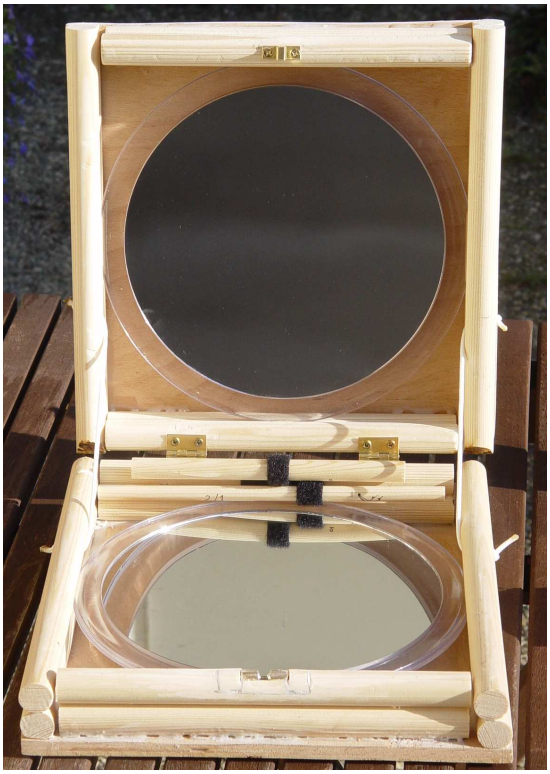


SLIKA 4.
Gorišče pri trojnem odboju (9 cm) se precej skrajša glede na gorišče posameznega zrcala (66 cm). Osnovnica kvadrata na mreži meri 5 cm.



SLIKA 5.
Gorišče pri petkratnem odboju je zelo blizu spodnjega zrcala, morda je celo navidezno. Pravo sliko pa vseeno prav dobro opazimo. Osnovnica kvadrata na mreži meri 2 cm.

Poskuse smo izvedli tako, da smo zrcali postavili v nalašč za to izdelan lesen zabojček s pokrovom (glej sliki 6 in 7). Na pokrovu je drugo zrcalo, v pravilno lego pa ga postavimo s primerno dolgo podporno palico. Tako učilo lahko učenci pri pouku izdelajo sami.



SLIKA 6.
Zrcali v školjčni postavitvi

SLIKA 7.
Slika fotografskega objektiva po treh odbojih svetlobe na zrcalih

Barvni sudoku

V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

			1		2		8
						6	
5				1			
7	6						
3						2	
	5	4	2			8	
		2			6		4
				3			

Rešitev barvni sudoku

4	7	6	1	5	2	3	8
2	8	5	3	4	1	6	7
5	2	3	8	1	7	4	6
7	6	1	4	2	8	5	3
3	1	8	7	6	4	2	5
6	5	4	2	7	3	8	1
1	3	2	5	8	6	7	4
8	4	7	6	3	5	1	2

Razmisli in poskusi

Odgovor na vprašanje iz številke 43/4

Mitja Rosina

60. Perkolacija

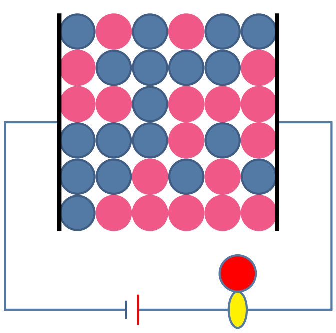
Zgled za perkolacijo (pronicanje) je povezava med elektrodama preko prevodnih kroglic (slika 1). V kvadratni škatli je slučajna mešanica kovinskih in steklenih kroglic. Na dveh nasprotnih ploskvah škatle sta kovinski plošči, zvezani preko baterije in žarnice, ki sveti, če množica kroglic prevaja.

Ker nismo imeli pri roki kroglic, smo naredili preprosto računalniško simulacijo na matriki 10×10. Kroglice (elemente matrike) smo označili z 0, če je kroglica steklena, in z 1, če je kroglica prevodna. Izbira je bila slučajna, pri tem je imel delež prevodnih kroglic verjetnost p, delež neprevodnih kroglic pa $1-p$. Nato smo preverili, ali sta elektrodi povezani preko prevodnjih kroglic ali ne. V ta namen smo označili z 2 kroglice, ki so očitno povezane z levo elektrodo, in postopoma »posodabljali« nadaljnje prevodne kroglice, ki imajo sosedo z značko 2.

Pri izbrani vrednosti p smo ponovili račun 1000-krat , da sem dobil verjetnost za perkolacijo

$$w(p) = N_{\text{per}}(p)/N_{\text{vsi}}(p)\,,$$

pri čemer je $N_{\text{per}}(p)$ število perkoliranih primerov in $N_{\text{vsi}}(p) = 1000$ število vseh primerov.



Slika 1.
Zgled iz prejšnje številke Preseka (modre kroglice so prevodne). Že s prostim očesom vidimo, da sistem perkolira.

p	w
0,3	0,00
0,4	0,01
0,5	0,07
0,6	0,30
0,7	0,72
0,8	0,97
0,9	1,00

Tabela 1.
Verjetnost za perkolacijo w v odvisnosti od deleža prevodnih kroglic p pri mreži 10×10 (naš zgled)

Rezultati v tabeli 1 veljajo za našo majhno mrežo 10×10. Ker smo poskus ponovili le 1000-krat, je tudi nekaj statistične napake (pri ponovitvah so bile razlike kvečjemu ±0.02). Pri kritični vrednosti $p_c \sim 0.65$ verjetnost za perkolacijo w hitro naraste od majhne vrednosto do blizu 100%.

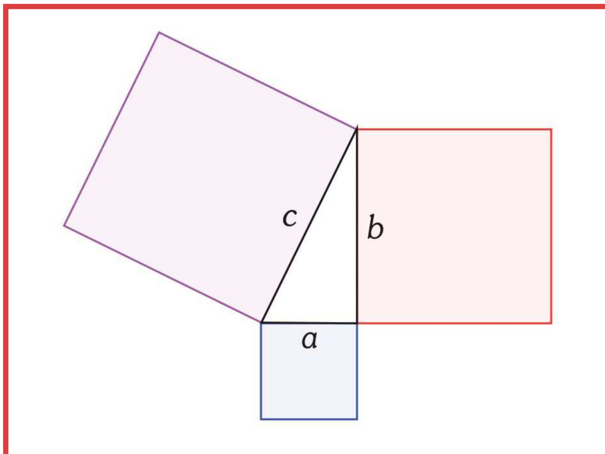
Pri veliki mreži pa pri kritični vrednosti p_c naraste verjetnost za perkolacijo $w(p)$ zelo hitro od 0 proti 1. Za velikre mreže navajajo v literaturi $p_c = 0.593$.

Literatura

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Percolation_threshold\#2-Uniform_Lattices, ogled: 25. 2. 2016.

[2] Enostavne zglede najdete tudi v seminarski nalogi Kristine Pajek (http://fizika.fnm.uni-mb.si/files/seminarji/13/perkolacijska_teorija.pdf, ogled: 25. 2. 2016).

Nagradna križanka



AVTOR MARKO BOKALIČ | KANADSKA PEVKA TWAIN | KARTONČEK Z IMENOM, NASLOVOM IN TELEF. ŠTEVILKO | PRIPOVEDNA KNJIŽEVNOST | PRENAŠANJE SPOROČIL NA DALJAVO | LAVRENCIJ | PREJEMNICA DARILA | NEKDANJI KENIJSKI VODITELJ (DANIEL ARAP) | GOVORNIŠKA SPRETNOST | STOPNJA

MERILNIK SVETLOBE PRI FOTOAPARATU | 2

KRIVULJA STOŽNICA IZ DVEH SIMETRIČNIH DELOV | 16

ZAŠČITA POLITIČNEGA EMIGRANTA | KANADSKA PEVKA (CELINE) | ORAL, JUTRO

ANTIČNO MESTO V MALI AZIJI | KILOGRAM

MEJNA STOPNJA | ONEGA

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ | ZVEZA EVROPSKIH KOŠARKARSKIH LIG | POKOJNI PALESTIN. TERORIST. VODJA (ABU) | LEVI PRITOK LOARE IN DEPARTMA V FRANCIJI | PRIZNANJE PORAZA PRED KONCEM BOJA | ELZA BUDAU | AZIJSKA DRŽAVA | NAŠ PEVEC (VILI) | REKA RONA (IZVIRNO) | PRITOK PADA PRI CREMONI | TERMOELEKTRARNA

NAJVIŠJA IZOBRAŽEVALNA USTANOVA | OČE | HERMANN VOGEL | NAPRAVA, KI MEŠA ZRAK | ZAKONČEV OČE

AMERIŠKI LETALSKI PIONIR (CHARLES) | IZPUŠČAJ NA USTNI SLUZNICI | DRAŽBA, LICITACIJA | 3 | NAŠ SLOVSTVENI SPOMENIK | PTIČKA PEVKA

STARONORDIJSKI KNJIŽEVNI SPOMENIK | 4 | SELEN | ANTON LAJOVIC | RAZLIČICA | NAJVEČJA VREDNOST NIHAJOČE KOLIČINE | 7 | ČASOVNA ENOTA

ŽENSKA, KI ŽIVI NA BARJU | OBOROŽENE SILE DRŽAVE | IRANSKI DENAR | OTOK, NA KATEREM JE ŽIVEL NAPOLEON | DRUŠTVO VISOKOINTELIGENTNIH LJUDI

STAREJŠI ITALIJANSKI PEVEC, ZNAN PO RASKAVEM GLASU (FAUSTO) | ASTRONOMSKI POJAV | ORGAN OB TESTISU ZA SPERMIJE | DIPLOMAT ZAČETNIK | ESTETSKI UREJEVALEC | MERILNA NAPRAVA | EMANUEL LASKER

ROJSTNI KRAJ DRAGOTINA KETTEJA PRI ILIRSKI BISTRICI | ELEMENT ZAPOREDJA | MEDNAROD. ČLOVEKOLJ. ZDRUŽENJE

NEKDANJI BRITANSKI PREMIER (TONY) | 6 | APROKSIMACIJSKA VREDNOST | 15

ANGLOAMERIŠKA DOLŽINSKA ENOTA | RT NA ZAH. PORTUGAL. | POLJSKI GLED. REŽ. (JANUSZ) | 5 | ZATILJE | POLJSKI FILMSKI REŽISER (ANDRZEJ)

JUNAK IZ JANČARJEVEGA *GALJOTA* (JOHAN) | JAVNO ZBIRANJE PODATKOV | GL. MESTO ITALIJE | NEMŠKA KANCLERKA (ANGELA) | LOČEK (NAREČNO)

TONSKI SPOL V GLASBI | DOLGA KONJSKA DLAKA | NIKALNICA | NAŠ UMET. ZGODOVINAR (NACE) | MOLIBDEN | 8

OTROK BREZ BRATA ALI SESTRE | TRAVNIŠKA ZDRAVILNA RASTLINA

OPTIČNA NAPRAVA ZA SNEMANJE SLIKE | POLOTOK NA SEVERU AVSTRALIJE

POTOVANJE PO AFRIŠKI DIVJINI Z MOŽNOSTJO FOTOGRAFIRANJA DIVJIH ŽIVALI | VELIKI NEMŠKI FIZIK (MAX) | REDNI DOHODEK IZ NALOŽB | LATINSKI PREDLOG | FRANCOSKI PISATELJ (ANDRE) | GLAVNI SUMERSKI BOG, EA | 1500 Z RIMSKIMI ŠTEVILKAMI | METULJ Z BELIMI KRILI | OPERNI SPEV ZA SOLISTA

POVEČANJE ALI ZMANJŠANJE VREDNOSTI

? GRAHAM BELL | 14

OBOŽEVALEC (IZ ANG.) | USPOSABLJANJE ZA POKLIC | ROCKER PRESLEY | LITIJ | DVOGOVOR

RASTLINSKI MOŠKI ORGAN | SLIŠNO VALOVANJE | 13

HRVAŠKI NAFTAR | BRAZILSKA OZNAKA ZA MEŠANCE

RAZSVETLJENSTVO | ITALIJAN. FILMSKA DIVA (SOPHIA) | AKONTACIJA | SOSEDNJI ČRKI | MOTNJA V DELOVANJU NAPRAVE | SLIKA GEOMETRIJSKE TVORBE NA PROJEKCIJSKI RAVNINI | VPITJE | SPODBUJANJE | POLITIČARKA POTOČNIK | POTENCA ŠTEVILA 10

IGRALKA DEREK | KRAJ PRI LJUBNEM OB SAVINJI | PAKET, ZAVOJ | MAŠNA KNJIGA | POPULARNA ZABAVNA GLASBA | INDIJANCI V MEHIKI

17 | 11 | NAŠA PEVKA (EVA) | SLOVANSKA BOGINJA POMLADI

JAMA ZA STROJENJE KOŽ | STEKLENICA | 12 | TONSKI SPOL | SKAKALKA V VIŠINO BABAKOVA | BOHINJSKO SMUČIŠČE | RUS.-LATV. ŠAHIST (MIHAIL)

IZUMRLA OPICA IZ MIOCENA | RIBIŠKI PLEN | 1 | RUDOLF MAISTER | HUMORISTKA PUTRIH

9 | BOŽIČNA "INSTALACIJA" | VRSTA STROČNICE

SEVALO | PREDMESTJE LONDONA | NEMŠKI SKLADAT. (WERNER) | PRIPRAVA PRI ŠIVAL. STROJU | VOZNIK PLOVILA

OD SONCA VEČJA ZVEZDA | FINSKO OTOČJE | POKOJNI GLASBENIK SOSS

RADO ČASL | RAZGLEDNIK NAD TURJAKOM, GORA | FRANCOSKI FIZIK, NOBELOVEC LETA 1970 (LOUIS)

MATEMAT. KONSTANTA | SPREDNJI DROG PRI VOZU | BESEDA NA KONCU MOLITVE | IDEJNI POBUDNIK

RT NA VZH. OBALI ŠPANIJE | ZAPOREDNI ČRKI | 10 | CHICAŠKO LETALIŠČE | VEZNIK | 18

MORSKI ENOCELIČARJI S POROZNO LUPINICO

PRIJAVLJEN STORILEC KAZNIVEGA DELANJA | ALUMINIJ

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **5. avgusta 2016**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

Naloge 23. sanktpeterburške astronomske olimpijade

Andrej Guštin

→ Letos so se najboljši udeleženci državnega tekmovanja iz znanja astronomije za Dominkova priznanja udeležili internetnega astronomskega tekmovanja za osnovne in srednje šole, ki ga organizira Univerza Sankt Peterburg iz Rusije. Tokrat objavljamo naloge finalnega dela tega tekmovanja.

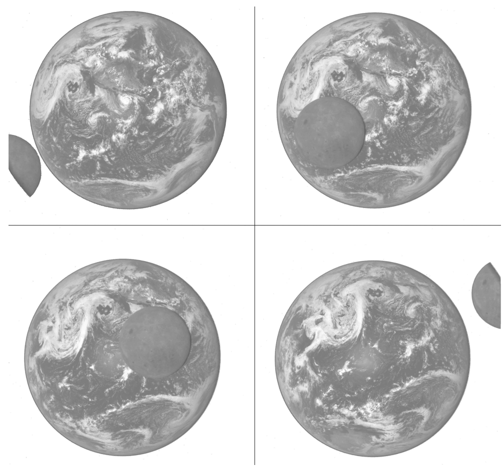
7. – 8. razred osnovne šole

Na sliki 1 je zaporedje fotografij v negativu, ki so bile posnete z gore Corcovado (Rio de Janeiro, Brazilija). Ocenite oddaljenost fotografa od Kristusovega kipa in čas, ki je pretekel med prvim in zadnjim posnetkom. Višina kipa je 38 m, razpon rok kipa je 28 m. Kaj je lahko nebesno telo, ki je na fotografijah vidno ob desnem robu Lune? Polmer Lune je 1/4 polmera Zemlje, razdalja med Zemljo in Luno pa je 60 Zemljinih polmerov.

SLIKA 1.

9. razred osnovne šole, 1. letnik srednje šole

Fotografije Zemlje in Lune je posnela vesoljska sonda. Ocenite oddaljenost sonde od Zemlje, ko je naredila te posnetke. Narišite razporeditev Zemlje, Lune, Sonca in sonde v času nastanka posnetkov. Koliko časa je minilo med prvim in zadnjim posnetkom? Predpostavite, da je sonda sorazmerno daleč od Zemlje in od Lune. Polmer Lune je 1/4 polmera Zemlje, razdalja med Zemljo in Luno pa znaša 60 polmerov Zemlje.

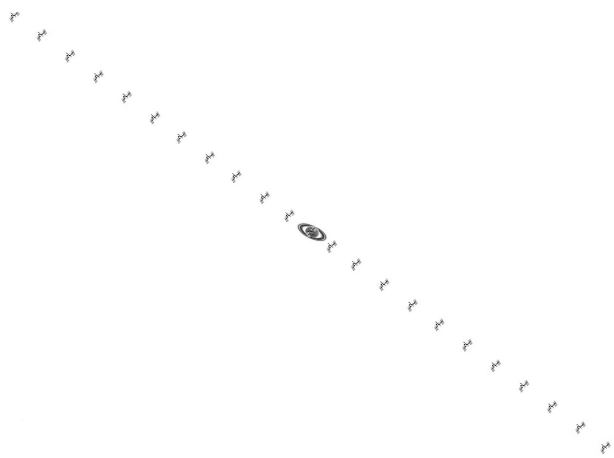


SLIKA 2.

2. letnik srednje šole

Na sliki 3 je zaporedje posnetkov v negativu Mednarodne vesoljske postaje (MVP) in njenega prehoda čez Saturn, ki se je zgodil 15. januarja 2016. Ocenite trajanje prehoda MVP čez Saturnove kolobarje in časovni interval med prvim in zadnjim posnetkom MVP na spodnji sliki. Kolikšna je širina pasu na površju Zemlje, znotraj katerega je fotograf lahko naredil tak posnetek?

Znano je, da je bila ta dan elongacija Saturna 42°, višina orbite MVP pa 400 km. Predpostavite, da je bil Saturn za fotografa v zenitu, vrtenje Zemlje pa zanemarite.



SLIKA 3.

3. letnik srednje šole

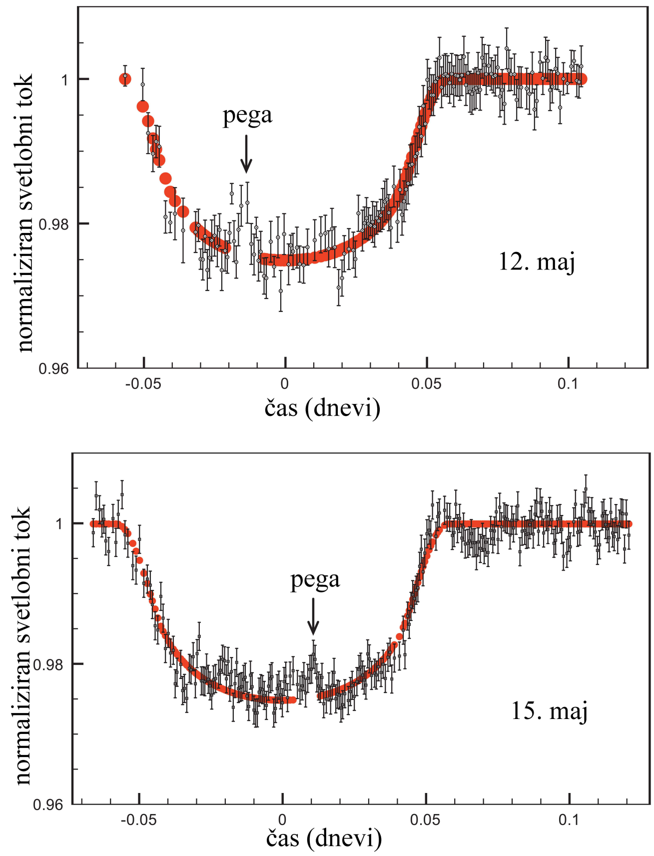
Na slikah 4 sta krivulji sija pri prehodu planeta prek matične zvezde. Na obeh grafih je označeno mesto, ko je planet šel pred pego na zvezdi. Zvezda ima navidezno vizualno magnitudo $m = 11{,}8$, njen spektralni tip je K0 V, njen polmer pa je 0,57 polmera Sonca. Obhodna doba planeta okoli zvezde je 3,03 dni, premer planeta je 1,8-krat večji od Jupitrovega premera, njegov geometrijski albedo pa je 0,5.

Ocenite, na kolikšno največjo kotno oddaljenost se planet za opazovalca na Zemlji oddalji od zvezde. Ocenite temperaturo planeta. Določite vrtilno dobo zvezde (na njenem ekvatorju) in njeno povprečno gostoto. Predpostavite, da je prehod planeta pred zvezdo centralen, orbita planeta okoli zvezde pa krožna.

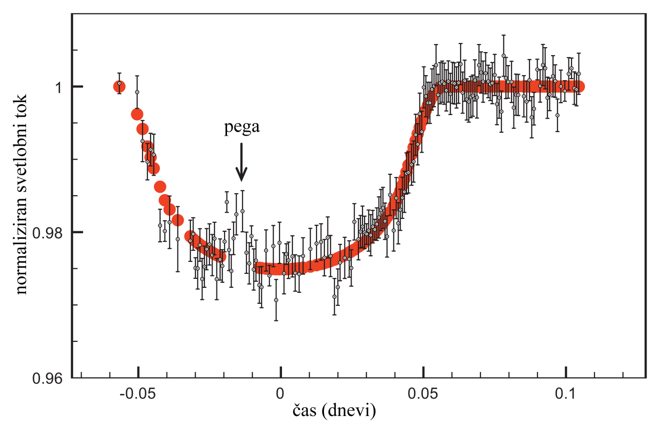
4. letnik srednje šole

Na sliki 5 je krivulja sija (v vidni svetlobi) ob prehodu planeta pred matično zvezdo. Planet sodi med tako imenovane vroče jupitre. Iz poteka krivulje lahko sklepamo, da je planet šel tudi pred hladno pego na zvezdi. Zvezda ima navidezno vizualno magnitudo $m = 11{,}8$ in pripada spektralnemu razredu K0 V. Če na njej ne bi bilo pege, bi bila normalizirana gostota svetlobnega toka z nje $F = 1{,}015$.

Predpostavite, da je pega okrogla in večja od planeta, in ocenite temperaturo ter polmer pege. Ocenite tudi polmer planeta.



SLIKA 4.



SLIKA 5.

Teoretične naloge

7. – 8. razred osnovne šole

- Sledeča nebesna telesa razvrstite od najbližjega do najbolj oddaljenega od Zemlje: Andromedina galaksija, kvazar 3C48, komet C/2013 US10 (Catalina), meglica Sova.
- Princesa Sofija Avgusta Frederika Anhalt-Zerbst je prvič prišla v Sankt Peterburg 3. februarja 1744. Kateri dan v tednu je bil to?
- V filmu Marsovec je član ekspedicije Ares III Mark Watney na Marsu preživel 549 solov (sol je srednji Sončev dan na Marsu), preden so ga rešili astronavti vesoljskega plovila Hermes. Mars se enkrat okoli svoje osi zavrti v času 24 ur in 37 minut, obhodni čas Marsa okoli Sonca pa je 687 zemeljskih dni. Z natančnostjo ene minute izračunajte trajanje sola. Koliko zemeljskih dni je Mark Watney preživel na Marsu?
- Na dan, ko je Anakin Skywalker rešil planet Alderaan, se mu je na planetu Tatooine rodil sin Luke. Še isti dan je Anakin poletel proti planetu Tatooine. Alderaan in Tatooine sta oddeljena 4 parseke. Anakinova vesoljska ladja leti s hitrostjo, ki je petkrat manjša od hitrosti svetlobe. Koliko je bil star Luke, ko je Anakin prišel na Tatooine?
- Za koliko je lahko Zemlja bližje središču Galaksije kot Sonce? Kdaj (kateri mesec v letu) je to?

9. razred osnovne šole, 1. letnik srednje šole

- Neki asteroid se giblje po krožni orbiti in vsakih šest let je ob eni od njegovih opoziciji viden v ozvezdju Kozorog. Koliko časa po opoziciji v Kozorogu bo asteroid v naslednji opoziciji? V katerem ozvezdju bo takrat?
- Atomarni vodik je v Galaksiji razporejen v disku s polmerom okoli 20 kiloparsekov in debelino približno 50 parsekov. Celotna masa atomarnega vodika je približno 7×10^9 mas Sonca. Masa enega atoma vodika je 2×10^{-24} g. Ocenite koncentracijo atomov vodika (število atomov na prostorninsko enoto) v disku Galaksije. Masa Sonca je 2×10^{30} kg.
- Neko vesoljsko telo ima enako maso kot Sonce in sledečo lastnost: teža muhe na njegovem površju je enaka teži slona na površju Zemlje. Ocenite gostoto tega vesoljskega telesa. Kateri vrsti vesoljskih teles lahko pripada to telo?
- Ocenite, pri katerem največjem naklonu Venerine orbite glede na ekliptiko bi še lahko videli prehod Venere čez Sončevo ploskvico ob vsaki njeni spodnji konjunkciji.
- Zamislite si, da jutri zjutraj (14. februar 2016) malo pred vhodom Sonca opazujete parado svetlih planetov in Lune na nebu. Kako si ta nebesna telesa sledijo (od vzhoda proti zahodu) na nebu? Pomagate si lahko s sledečimi podatki: 9. marca bo popolni Sončev mrk; pred tednom dni je bil Merkur v največji zahodni elongaciji; Venera je na nebu 28,5 stopinj zahodno od Sonca; Mars je v ozvezdju Tehtnica; Jupiter bo 8. marca v opoziciji s Soncem; Saturn ni v nobenem od zodiakalnih ozvezdij.

2. letnik srednje šole

- V pravljici Lewisa Carrolla Alica v čudežni deželi se Alica večkrat poveča in pomanjša. Za koliko se spreminja navidezna magnituda najšibkejših nebesnih teles, ki jih Alica lahko še vidi s prostim očesom, če se njena višina spreminja med 5 cm in 5 m?
- Astronomi so pri preučevanju asteroidov Glavnega asteroidnega pasu ugotovili, da se ti večinoma nahajajo v območju ±4 stopinj od ekliptike, mejo pasu glede na oddaljenost od Sonca pa predstavljajo orbite asteroidov, katerih obhodna doba je v razmerju z obhodno dobo Jupitra 1 : 3 in 2 : 3. Predpostavite, da je v tem območju okoli 300 tisoč asteroidov in ocenite povprečno oddaljenost med sosednjima asteroidoma.
- Za zvezdo Vego je znano, da je znatno sploščena. Ocenite razmerje njenega ekvatorialnega in polarnega polmera, če veste, da bi se njen največji in najmanjši navidezni sij razlikoval za 1 magnitudo, če bi jo lahko opazovali z vseh strani. Predpostavite, da je površinska svetlost Vege po vsem njenem površju enaka.
- Kot se mnogi lahko spomnite, so prvi kentavri, ki jih je v življenju srečal Harry Potter, družno pogledali v nebo in rekli: »Mars je danes zelo svetel.« Iz knjige je znano, da se je to zgodilo leta 1992 neke majske noči okoli polnoči. Dokažite, da so kentavri brezsramno lagali, če veste, da bo maja 2016 navidezna magnituda Marsa −2. Obhodna doba

Marsa okoli Sonca je 1,88 leta.

- V planetnem sistemu EPIC 201367065 se okoli središčne zvezde polmera $R = 0{,}56\ R_{\mathrm{Sonce}}$ in mase $M = 0{,}6\ M_{\mathrm{Sonce}}$ gibljejo trije planeti, katerih polmeri so $r_1 = 0{,}0348R$, $r_2 = 0{,}0279R$, $r_3 = 0{,}0248\ R$, polmeri njihovih orbit pa $a_1 = 0{,}078$ a.e., $a_2 = 0{,}14$ a.e., $a_3 = 0{,}21$ a.e. Na katerem planetu, drugem ali tretjem po oddaljenosti od matične zvezde, bi hipotetični prebivalci videli dlje trajajoči navidezni prehod temu planetu najbližjega notranjega planeta čez ploskvico zvezde? Orbite planetov so krožnice in ležijo v isti ravnini. Vsi trije planeti okoli zvezde krožijo v isti smeri.

3. letnik srednje šole

- Povprečna gostota Saturna je 0,69 g/cm^3. Njegova oblika je elipsoid z razmerjem med polarnim in ekvatorialnim polmerom 1 : 1,11. Kolikšna bi bila povprečna gostota Saturna, če bi se ta preoblikoval v kroglo s polmerom, ki bi bil enak siceršnjemu polarnemu polmeru?
- Pri obdelavi spektra zvezde Alferat (rektascenzija: 0h 08min, deklinacija: +29°), posnetega v rdečem območju vidne svetlobe, je prišlo do napake. Spekter je bil posnet 25. junija, a je astronom, ki je meritve obdeloval, zmotno mislil, da je bil datum opazovanja 20. december. Ugotovite, kakšne popravke je treba narediti pri rezultatih meritev rdečega dela spektra, da bi napako odpravili. Ocenite (količinsko) velikost popravkov.
- Spomnite se kake fotografije Saturna in ocenite delež (odstotek) celotnega »površja« Saturna, s katerega njegovi prstani niso vidni.
- Obhodna doba zvezd v dvozvezdju, v katerem se iz ene zvezde pretaka snov na drugo, je 2,5 dneva. Znano je, da se je ta obhodna doba v zadnjih 100 letih podaljšala za 20 sekund. Ena komponenta dvozvezdja ima 3-kratno maso Sonca, druga pa 5-kratno maso Sonca. Ocenite hitrost akrecije v sistemu – količino snovi, ki se v enem letu pretoči z ene zvezde na drugo. Katera zvezda snov oddaja in katera jo sprejema?

4. letnik srednje šole

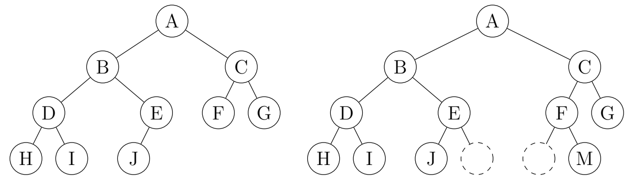
- Opazovalec na severni polobli je nekega dne opazoval vzid Sonca ob 9.04 po lokalnem času. Naslednji dan se je Sonce na obzorju pokazalo točno ob 9.00. Določite datum opazovanja. Kdaj in na kateri višini nad obzorjem bo naslednja zgornja kulminacija zvezde Kapela (rektascenzija: 5h 17min, deklinacija: +46°)? Zanemarite kotno velikost Sončeve ploskvice in časovno enačbo.
- Denimo, da so astronomi v Osončju odkrili telo, katerega orbita je ležala v ravnini ekliptike. Ko sta kota »perihelij telesa – Sonce – telo« in »Sonce – telo – Zemlja« sočasno postala prava kota, so astronomi opazili nenadno povečanje sija telesa. Pokazalo se je, da je to telo kovinski leteči krožnik, katerega ravnina je pravokotna na ravnino njegove orbite, rob krožnika pa je obrnjen v smeri gibanja. Izračunajte ekscentričnost orbite tega telesa in njegovo oddaljenost od Sonca v periheliju, če veste, da je bila ob odkritju njegova kotna oddaljenost od Sonca 30°.
- Dvojni pulzar PSR B1913+16 sestavljata dve nevtronski zvezdi s približno enakima masama, ki znašata 1,4 mase Sonca, povprečna oddaljenost med njima pa je 2×10^6 km. Znano je, da sistem oddaja gravitacijske valove, zaradi česar se obhodna doba zvezd zmanjšuje za 80 mikrosekund letno. Ocenite razmerje med gravitacijskim izsevom sistema PSR B1913+16 in njegovim izsevom v vidni svetlobi, če veste, da je sistem od Sonca oddaljen 7 kiloparsekov in je njegov navidezni sij v vidni svetlobi +22m.
- V knjigi Silmarillion je opis, kako so se ob nekem jezeru Srednjega sveta škrati prebudili zaradi soja zvezd, kar se je zgodilo še pred nastankom Sonca in Lune. Predpostavite, da je bila osvetljenost Srednjega sveta z zvezdami enaka kot osvetljenost površja Zemlje s polno Luno, in ocenite, kolikokrat več zvezd bi videli s prostim očesom na nebu Srednjega sveta kot na našem nebu.
- Dvozvezdje sestavljata dve enaki zvezdi s polmeroma 1,3 polmera Sonca in površinsko temperaturo 6500 K, gibljeta pa se po krožnih orbitah s polmerom 1,2 a.e. Ali se lahko okoli ene od zvezd planet giblje v območju, ki je primerno za življenje (na površju planeta lahko obstoja tekoča voda), če je geometrijski albedo planeta 0,3?

× × ×

Podatkovna struktura kopica

Andrej Taranenko

Tokrat bomo predstavili podatkovno strukturo, imenovano kopica. V literaturi se pojavlja več različnih definicij strukture, ki se skriva pod imenom kopica. V našem prispevku bo kopica dvojiško drevo z zahtevanimi dodatnimi lastnostmi, podrobneje definirana v nadaljevanju. Ponovimo na začetku nekaj o dvojiških drevesih.



SLIKA 1.
Levo poravnano dvojiško drevo in dvojiško drevo, ki ni levo poravnano.

Dvojiško drevo in predstavitev s poljem

Dvojiško drevo je podatkovna struktura, ki je bodisi prazna bodisi za vsako vozlišče velja, da ima največ dva otroka.

Z besedo *vozlišče* imamo v mislih strukturo, ki vsebuje vrednost, imenovano *ključ*, ter dve vozlišči, imenovani *levi* in *desni otrok*. Kadar govorimo samo o otrocih, bomo v mislih imeli poljubnega izmed njiju ali oba. Vozlišče v je *starš* vozlišča u, če je u otrok vozlišča v.

V dvojiškem drevesu, ki ni prazno, imamo posebno vozlišče, imenovano *koren* oz. *korensko vozlišče*. Korensko vozlišče imamo za prvi *nivo* drevesa. Njegovi otroci so na drugem nivoju drevesa, njihovi otroci na tretjem itd. Naj bo v vozlišče dvojiškega drevesa. Če pogledamo drevo, katerega korensko vozlišče je levi otrok vozlišča v, govorimo o *levem poddrevesu*, drevo, katerega koren je desni otrok vozlišča v, pa je *desno poddrevo*. Vozlišče drevesa, ki nima otrok, imenujemo *list*.

Na sliki 1 vidimo primera dveh dvojiških dreves. V obeh je vozlišče s ključem A korensko vozlišče. Če se omejimo na levo drevo na sliki 1, je drevo, ki ga tvorijo vozlišča s ključi C, F in G, desno poddrevo vozlišča s ključem A. Listi drevesa pa so vozlišča s ključi F, G, H, I in J. Drevo ima štiri nivoje. Vozlišče s ključem A je na prvem nivoju drevesa, vozlišči s ključema B in C na drugem nivoju drevesa, na tretjem so vozlišča s ključi D, E, F in G, na zadnjem (četrtem) nivoju pa vozlišča s ključi H, I in J.

Za dvojiško drevo, ki je *levo poravnano*, velja, da ima na vseh nivojih, razen morda zadnjem, vsa možna vozlišča. Na zadnjem nivoju drevesa pa dopuščamo, da na desni strani manjkajo vozlišča. Primer levo poravnanega drevesa vidimo na levi strani slike 1; primer devesa, ki ni levo poravnano, saj med vozliščem J in vozliščem M manjkajo črtkasto narisana vozlišča, pa vidimo na desni strani slike 1.

Dvojiško drevo lahko v računalniku med drugim predstavimo s poljem tako, da ključe v vozliščih od zgoraj navzdol in od leve proti desni za povrstjo shranimo v polje. Levo drevo na sliki 1 bi na ta način predstavili s poljem v tabeli 1.

Če ne bi zahtevali, da je drevo levo poravnano, bi pri tej predstavitvi v polju dobili prazna (neizkoriščena) mesta. V tabeli 2 vidimo desno drevo s slike 1 predstavljeno s poljem.

indeks	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
vrednost	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

TABELA 1.
Predstavitev dvojiškega drevesa s poljem

indeks	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
vrednost	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J			M

TABELA 2.
Dvojiško drevo, ki ni levo poravnano, predstavljeno s poljem.

Predpostavimo, da so elementi polja indeksirani od 0 naprej. Sami lahko preverite, da ima vozlišče, ki ga v polje shranimo na indeks i, levega otroka shranjenega na indeksu $2i + 1$, desnega pa na indeksu $2i + 2$. Starš vozlišča, shranjenega na indeksu i, je shranjen na indeksu $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$. V vseh primerih zapisano seveda velja, če element z ustreznim indeksom v polju sploh obstaja.

Kopica in operacije na njej

Kopica je levo poravnano dvojiško drevo, v katerem za vsako vozlišče velja: Če je A starš vozlišča B, potem je ključ v vozlišču A večji ali enak ključu v vozlišču B. Če vozlišče nima otrok, velja, da je lastnosti zadoščeno.

Tako definirana kopica se imenuje tudi *maksimalna kopica*. Podobno bi definirali *minimalno kopico*, kjer bi za vsako vozlišče veljalo, da je ključ v vozlišču manjši od ključa v otroku. V nadaljevanju bomo maksimalni kopici rekli samo kopica. Ker bomo kopico predstavili s poljem, zahtevamo, da imamo levo poravnano dvojiško drevo.

Primer kopice vidimo na sliki 2. Opazimo lahko, da je v korenskem vozlišču kopice vedno ključ največje vrednosti, kar je tudi splošna lastnost kopice.

Spoji kopici

Prvi postopek nad kopicami, ki ga bomo predstavili, se imenuje *spoji kopici*. Gre za naslednje: podani imamo dve kopici in še eno vozlišče. Vse troje bi radi spojili (združili) v eno dvojiško drevo, ki bo tudi kopica.

Začetno stanje problema je predstavljeno na sliki 3, na kateri vidimo dve kopici (rdeče in zeleno obarvano drevo) ter dodatno (modro obarvano) vozlišče, ki bi ga želeli povezati s podanima kopicama. Rdeče in zeleno drevo zadoščata lastnostim kopice, celotno drevo pa ne predstavlja kopice, saj modro vozlišče nima ključa, večjega od desnega otroka.

Postopek spoji kopici izvedemo tako: naše trenutno vozlišče na začetku postane dodatno (modro) vozlišče. Dokler s trenutnim vozliščem nismo v listu kopice ali pa trenutno vozlišče krši lastnost kopice (ključ v trenutnem vozlišču je manjši od vsaj enega izmed ključev v otrocih), zamenjaj ključ s ključem večjega izmed otrok in se prestavi na vozlišče, s katerim smo zamenjali vrednosti.

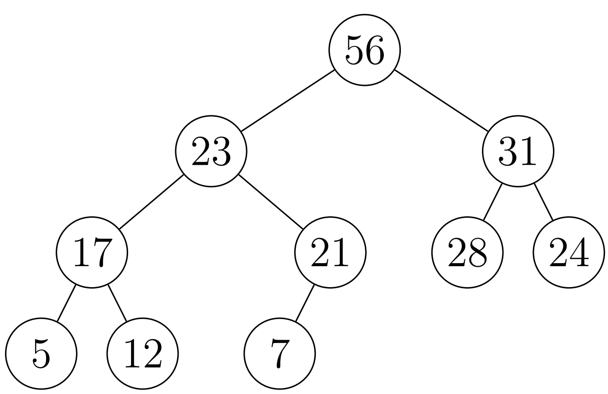
Korake postopka spoji kopici za primer s slike 3 vidimo na sliki 4, pri čemer je trenutno vozlišče vedno obarvano z modro.

Zgradi kopico

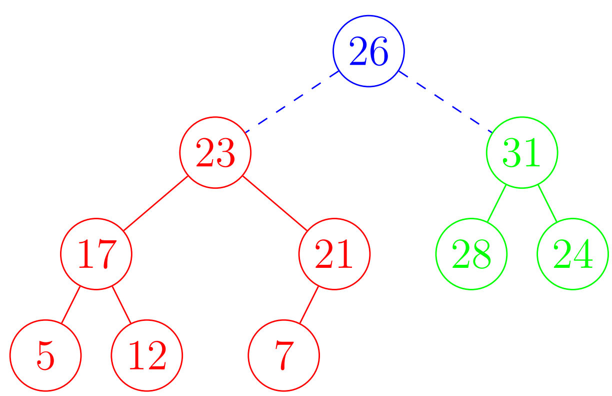
Pri postopku *zgradi kopico* predpostavimo, da imamo podano polje, katerega elementi ne zadoščajo nujno lastnostim kopice. Elemente polja želimo preurediti tako, da bo celotno polje predstavljalo kopico.

Poglejmo si primer, kjer je začetno stanje predstavljeno s sliko 5.

Pri izgradnji kopice si bomo pomagali s postopkom *spoji kopici*. Ker mora vsako vozlišče drevesa

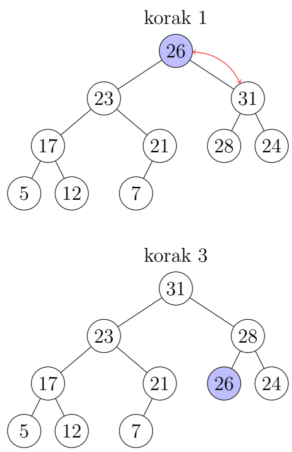


SLIKA 2.
Primer kopice



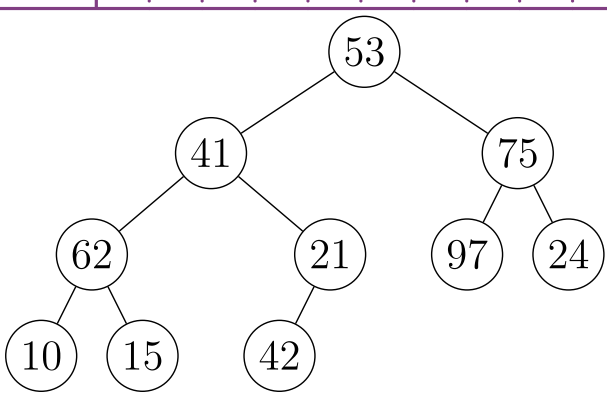
SLIKA 3.
Začetno stanje postopka spoji kopici

zadoščati lastnosti kopice, bomo po vrsti od desne proti levi in od spodaj navzgor spajali posamezne kopice. Listi dvojiškega drevesa vedno zadoščajo lastnosti kopice, saj nimajo otrok. Torej prvo vozlišče, pri katerem bomo izvedli postopek spoji kopici, bo starš najbolj desnega lista na zadnjem nivoju drevesa, zadnje bo pa korensko vozlišče.



SLIKA 4.
Koraki postopka spoji kopici

indeks	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
vrednost	53	41	75	62	21	97	24	10	15	42



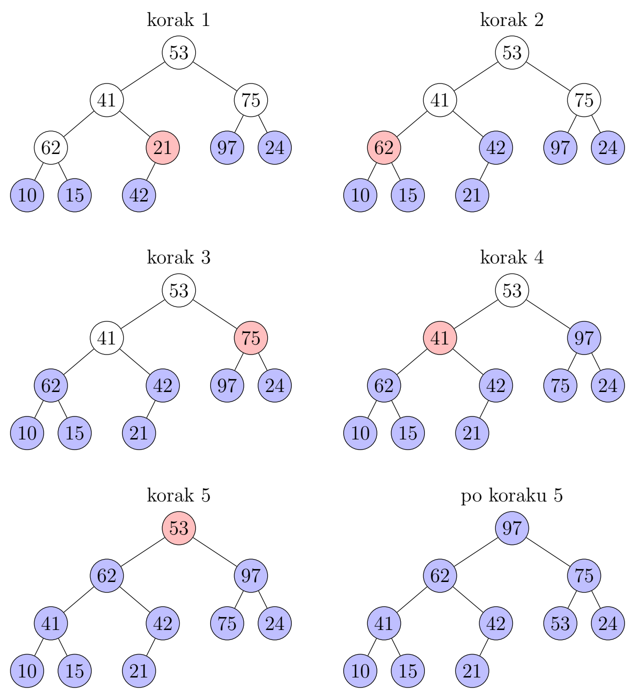
SLIKA 5.
Polje, ki ne predstavlja nujno kopice, in pripadajoče dvojiško drevo.

Na sliki 6 vidimo posamezne korake (en klic postopka spoji kopici) izvajanja postopka zgradi kopico. Poddrevesa z modro obarvanimi vozlišči že zadoščajo lastnostim kopice. Vozlišče obarvano z rdeče pa na vsakem koraku predstavlja vozlišče, ki ga spajamo s pripadajočima poddrevesoma (kopicama). Po zadnjem koraku dobimo dvojiško drevo, ki predstavlja kopico.

Odstrani največji element iz kopice

Tokrat želimo iz obstoječe kopice odstraniti največji element. V mislih imejmo, da bo v računalniku kopica shranjena v polju, tako da ne bomo elementa dejansko odstranili, ampak se bomo pretvarjali, da je velikost kopice (število elementov v kopici) manjša od števila vseh elementov v polju.

Največji element kopice učinkovito odstranimo tako: Zamenjaj največji element kopice (korenski) z najbolj desnim listom zadnjega nivoja. Zmanjšaj velikost kopice za en element. Spoji »novi« korenski element s kopicama, ki ju predstavljata njegova otroka.

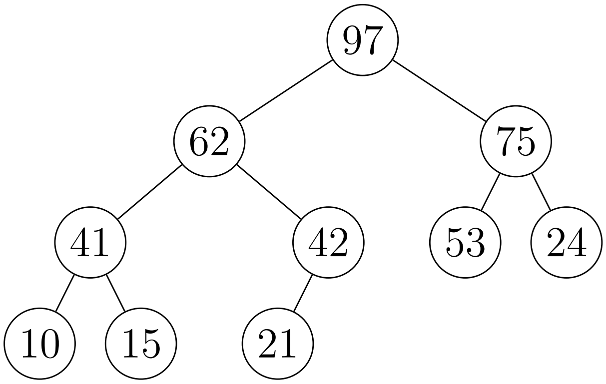


SLIKA 6.
Koraki postopka zgradi kopico

Poglejmo primer odstranjevanja največjega elementa iz kopice s slike 7.

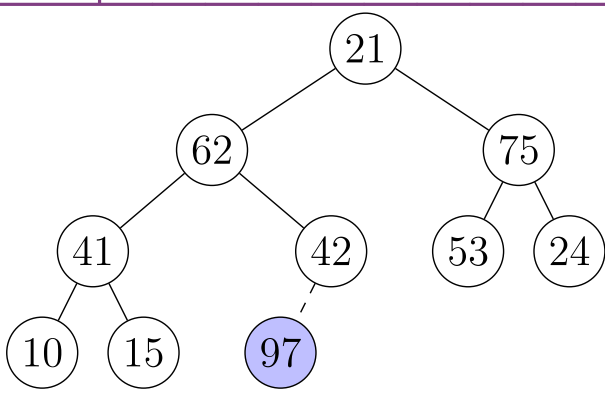
Iz kopice želimo odstraniti največji element. Na prvem koraku ga zamenjamo z najbolj desnim listom zadnjega nivoja in zmanjšamo velikost kopice za 1. Na slikah 8 in 9 to pomeni, da si predstavljamo, da modro obarvano vozlišče (element polja) ni več del kopice.

indeks	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
vrednost	97	62	75	41	42	53	24	10	15	21



SLIKA 7.
Kopica in pripadajoče polje

indeks	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
vrednost	21	62	75	41	42	53	24	10	15	97



SLIKA 8.
Prvi korak odstranjevanja največjega elementa

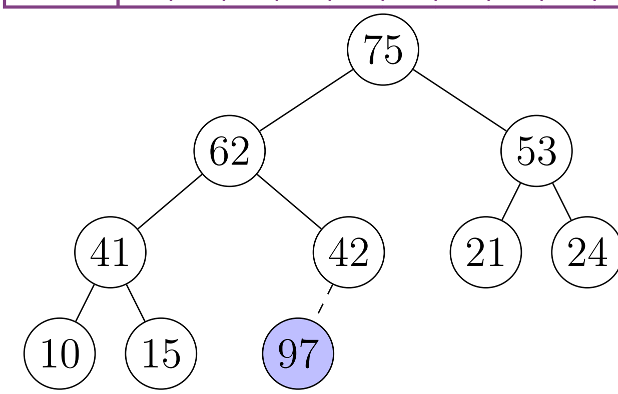
Ker smo spremenili prvi element drevesa, se lahko zgodi, da krši pravilo kopice. Drugih elementov, ki so ostali v kopici, nismo spreminjali, zato so ohranili lastnost kopice. Imamo torej dve kopici (levo in desno poddrevo) korenskega vozlišča in korensko vozlišče, ki morebiti krši lastnost kopice. Izpolnjeni so torej pogoji, da izvedemo postopek spoji kopici. Ne pozabite, modro obarvano vozlišče ni več del kopice. Po izvedenem postopku spajanja korenskega vozlišča s kopicama v levem in desnem poddrevesu dobimo kopico predstavljeno z belimi vozlišči na sliki 9.

Uporaba kopice

Kopica je zaradi svojih lastnostih koristna pri različnih problemih. Ker imamo v kopici v korenskem vozlišču na vsakem koraku vedno element z največjim ključem, je kopica zelo primerna za uporabo kot *prednostna vrsta*. V prednostno vrsto namreč dajemo elemente v nekem vrstnem redu, iz nje jih pa pridobivamo v vrstnem redu glede na njihovo prioriteto, ki pri implementaciji s kopico, predstavlja ključe, glede na katere gledamo urejenost. Kot smo povedali v prejšnjih razdelkih, imamo v kopici v korenu vedno največji element, ki ga znamo enostavno odstraniti.

Drugi primer uporabe, ki ga bomo predstavili tukaj, pa je urejanje podatkov v polju. Problem je sle-

indeks	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
vrednost	75	62	53	41	42	21	24	10	15	97



SLIKA 9.
Dobljena kopica po odstranjevanju največjega elementa

deč: imamo polje napolnjeno s podatki. Podatke v polju želimo urediti nepadajoče.

Tokrat bomo problem urejanja podatkov rešili s kopico. Pri odstranjevanju največjega elementa iz kopice lahko opazimo, da na mesto zadnjega elementa kopice (preden spremenimo velikost kopice) dobimo ravno največji element. Če torej iz dobljenih kopic zaporedoma odstranjujemo največji element, dobimo v polju ključe, urejene v nepadajočem vrstnem redu. Elemente odstranjujemo, dokler ima dobljena kopica več kot en element. Seveda moramo pred odstranjevanjem ključev iz podatkov polja zgraditi začetno kopico. Temu postopku urejanja pravimo *urejanje s kopico*. Urejanje s kopico ima časovno zahtevnost $O(n \log n)$ in je zato po hitrosti primerljivo z najhitrejšimi algoritmi urejanja.

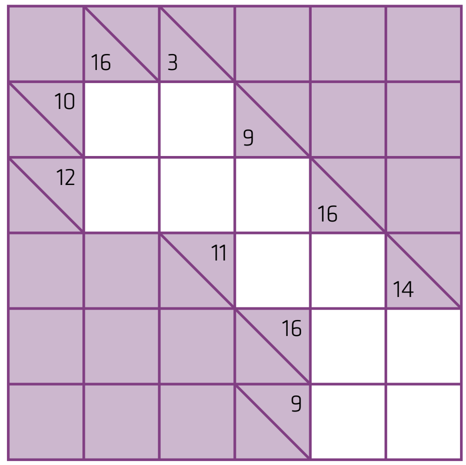
Poglejmo postopek urejanja s kopico na spodnjem primeru. Tokrat bomo zapisovali le polja, ki jih dobimo, in ne bomo izrisovali pripadajočih dvojiških dreves. Postopek je prikazan na sliki 10, pri čemer znova velja, da modro obarvani elementi niso več del kopice.

indeks	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
začetno stanje polja	53	41	75	62	21	97	24	10	15	42
izvedemo *zgradi kopico*	97	62	75	41	42	53	24	10	15	21
odstrani največjega	75	62	53	41	42	21	24	10	15	97
odstrani največjega	62	42	53	41	15	21	24	10	75	97
odstrani največjega	53	42	24	41	15	21	10	62	75	97
odstrani največjega	42	41	24	10	15	21	53	62	75	97
odstrani največjega	41	21	24	10	15	42	53	62	75	97
odstrani največjega	24	21	15	10	41	42	53	62	75	97
odstrani največjega	21	10	15	24	41	42	53	62	75	97
odstrani največjega	15	10	21	24	41	42	53	62	75	97
odstrani največjega	10	15	21	24	41	42	53	62	75	97
postopek zaključen	10	15	21	24	41	42	53	62	75	97

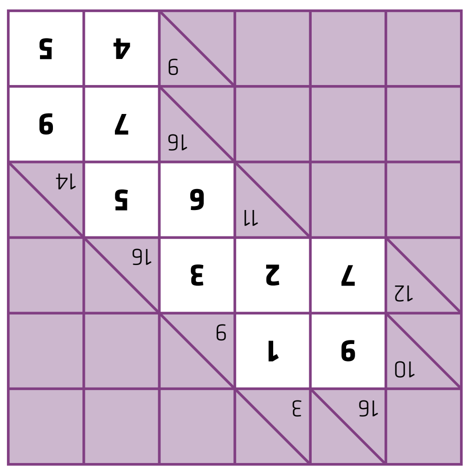
SLIKA 10.
Koraki postopka uredi s kopico na primeru podanega polja

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



REŠITEV KRIŽNE VSOTE



Maja Alif, foto: Jan Šuntajs, ilustracija: Ciril Horjak

V letošnjem letu se je tekmovanj iz matematike, fizike, astronomije, razvedrilne matematike, poslovne matematike, finančne matematike in statistike za različne stopnje osnovne in srednje šole v organizaciji DMFA Slovenije udeležilo več kot 130 000 učencev in učenk iz skoraj 700 različnih šol (`http://www.dmfa.si/Tekmovanja/Statistika.aspx`). Med skoraj 1000 prejemniki zlatih priznanj je 171 nagrajencev osvojilo 193 nagrad. Slednji so bili skupaj z družinskimi člani, mentorji in predstavniki šol povabljeni na tradicionalno podelitev nagrad Bistroumi 2016, ki je v soboto 14. maja potekala v Gallusovi dvorani Cankarjevega doma v Ljubljani.

Zbrane je uvodoma nagovoril predsednik DMFA Slovenije, **prof. dr. Matej Brešar**, ki se je spomnil na nedavno preminula velika slovenska znanstvenika, oba častna člana DMFA, matematika akademika profesorja Ivana Vidava in fizika profesorja Janeza Strnada. V duhu spomina nanju je zbranim v dvorani položil na srce: »Velike dosežke dosegajo velike osebnosti. Pomemben pa je prispevek vsakogar, ki doda kamenček v mozaik.«

Kot slavnostni gost je mlade nagovoril tudi **akademik profesor dr. Tadej Bajd**, predsednik Slovenske akademije znanosti in umetnosti. Poudaril je pomen

SLIKA 1.
Prof. dr. Matej Brešar.

slovenske poljudnoznanstvene literature in se prav tako spomnil akademika profesorja dr. Vidava. Ob koncu je šaljivo pripomnil, da je ob prihodu na fakulteto tudi on spoznal Vidava, a ne le enega, temveč kar dva – Vidava I in Vidava II (tj. znamenita učbenika Višja matematika I in II, deli Ivana Vidava, op. a.).

Na odru so bila podeljena številna priznanja, med njimi tudi znamenita Vegova priznanja najboljšim mladim matematikom ter nagrada Diamantni kenguru trem devetošolcem, ki so v devetih letih osnovnega šolanja osvojili skupaj največ točk na tekmovanju Kenguru.

Korakom nagrajencev so tempo dodali člani **skupine SToP**. Umetniško dovršeno prireditev, ki jo je odlično vodila **Blažka Müller Pograjc**, si je zamislil **dr. Boštjan Kuzman**, izvedba pa bi bila nemogoča brez logistične podpore **dr. Matjaža Željka** ter številnih drugih sodelujočih.

SLIKA 2.
Tolkalna skupina SToP je leta 2014 za svoje delo prejela nagrado Prešernovega sklada Republike Slovenije.

Preden je podelila priznanja najboljšim v znanju astronomije, je svoje področje dela predstavila tudi **dr. Andreja Gomboc**, prejemnica Zoisovega priznanja Republike Slovenije za pomembne znanstvene dosežke na področju astronomije. Ob nazornih animacijah je občinstvu na kratko predstavila gamma sevanje in gravitacijske valove.

Nagrajeni osnovnošolci so lahko ob zanimivem videu podoživeli vzdušje s tekmovanja v znanju fizike, podeljevalka priznanj in predsednica državne tekmovalne komisije **dr. Barbara Rovšek** pa je ob tem opisala nekoliko poseben sestavni del tega tekmovanja – eksperimentalne naloge. Svoje spomine na tekmovanje iz matematike, ki ima od vseh slovenskih tekmovanj v znanju najdaljšo tradicijo, je opisal Zoisov nagrajenec profesor **dr. Tomaž Pisanski**. Kot častni podeljevalec je predal nagrade najboljšim z letošnjega jubilejnega 60. tekmovanja srednješolcev iz znanja matematike za Vegova priznanja.

Prav gotovo je med najuspešnejšimi in (že več let zapored) največkrat omenjenimi na podelitvah nagrad DMFA dijak **Aleksej Jurca**. Letos je bil med najboljšimi tako pri matematiki kot tudi pri fiziki in astronomiji. Podelitve se tokrat ni mogel udeležiti, saj se je prav takrat s svojo ekipo vračal z Mednarodne naravoslovne olimpijade. Kljub temu je bil aktivno vključen v letošnjo prireditev, saj je za občinstvo posnel navdihujoč video svoje rešitve naloge o dvojnem pulzarju z enega od lanskih tekmovanj.

Vrhunec celotne prireditve je bila predstavitev 18-ih dijakov, izbranih za udeležbo na letošnjih mednarodnih olimpijadah iz znanja: 57. mednarodne matematične olimpijade v Hong Kongu, 47. mednarodne fizikalne olimpijade v Švici, 10. mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike v Indiji, 10. srednjeevropske matematične olimpijade v Avstriji in 5. evropske dekliške matematične olimpijade, ki je prejšnji mesec že potekala v Romuniji.

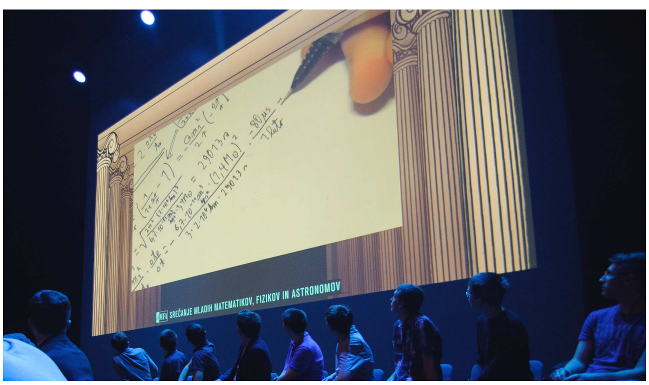
SLIKA 3.
Prejemnica Zoisovega priznanja dr. Andreja Gomboc na odru opisuje svoje znanstveno delo.

SLIKA 4.
Ena izmed številnih skupin nagrajencev na slavnostni podelitvi.

57. mednarodna matematična olimpijada, Hong Kong, 6.–16. julij 2016

- Jakob Jurij Snoj, Gimnazija Novo mesto
- David Popović, Gimnazija Bežigrad
- David Opalič, I. gimnazija v Celju
- Timen Stepišnik Perdih, I. gimnazija v Celju
- Domen Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem
- Andraž Maier, Gimnazija Jesenice.

Vodja ekipe: dr. Gregor Dolinar
Pomočnik vodje: Matej Aleksandrov



SLIKA 5.
Posnetek reševanja naloge o dvojnem pulzarju.

47. mednarodna fizikalna olimpijada, Zürich, Švica, 10.–18. julij 2016

- Tomaž Cvetko, Gimnazija Bežigrad
- Jernej Debevc, Prva gimnazija Maribor
- Luka Govedič, II. gimnazija Maribor
- Aleksej Jurca, Gimnazija Bežigrad
- Jakob Robnik, Gimnazija Bežigrad.

Vodji ekipe: dr. Jure Bajc in dr. Barbara Rovšek

10. mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike, Bhubaneswar, Indija, 9.–19. december 2016

- Luka Govedič, II. gimnazija Maribor
- Anže Jenko, Gimnazija Bežigrad
- Aleksej Jurca, Gimnazija Bežigrad
- Urban Ogrinec, Gimnazija in srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik
- Jakob Robnik, Gimnazija Bežigrad

Vodja ekipe: Andrej Guštin

10. srednjeevropska matematična olimpijada, Vöcklabruck, Avstrija, 22.–28. avgust 2016

- David Popović, Gimnazija Bežigrad
- David Opalič, I. gimnazija v Celju
- Timen Stepišnik Perdih, I. gimnazija v Celju
- Domen Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem
- Andraž Maier, Gimnazija Jesenice
- Nejc Zajc, Gimnazija Velenje.

Vodji ekipe: Mihaela Pušnik in Veno Mramor

5. evropska dekliška matematična olimpijada, Busteni, Romunija, 10.–16. april 2016

- Klara Drofenik, I. gimnazija v Celju
- Doris Keršič, Konservatorij za glasbo in balet Maribor
- Eva Seme, Gimnazija Bežigrad
- Maša Smajila, I. gimnazija v Celju.

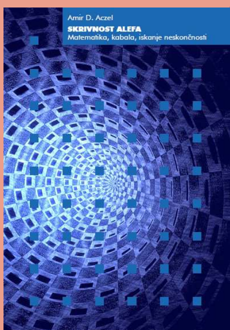
Vodja ekipe: Veno Mramor

× × ×

Novosti v naši ponudbi

V DMFA – založništvo izdajamo različne vrste literature.

Predstavljamo vam dve zadnji novosti:



Amir D. Aczel:

SKRIVNOST ALEFA

Matematika, kabala, iskanje neskončnosti

184 strani, format 14 × 20 cm

19,50 EUR

Carlo Rovelli

SEDEM KRATKIH LEKCIJ IZ FIZIKE

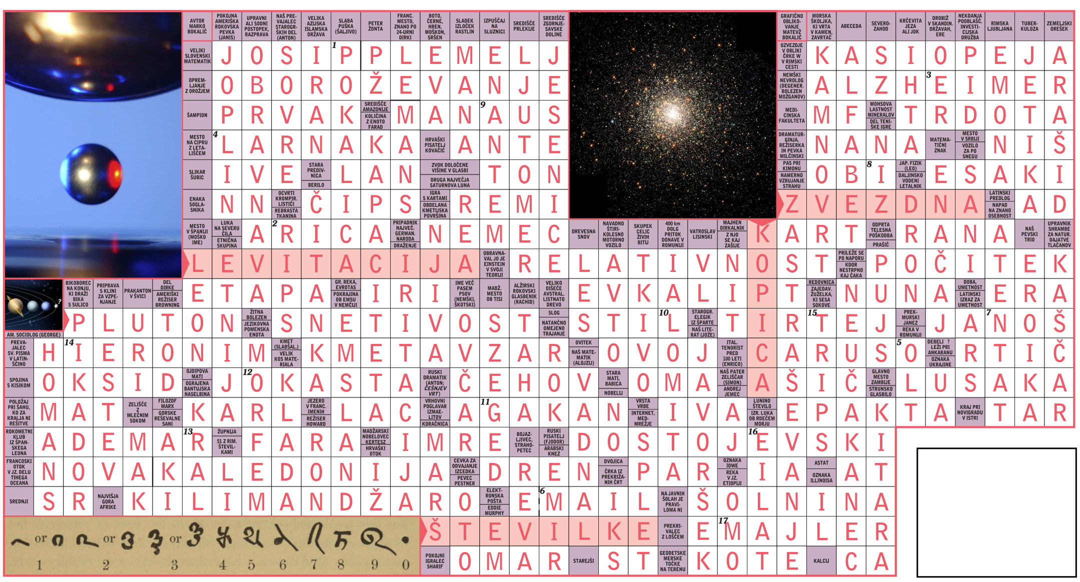
76 strani, format 12 × 17 cm

9,50 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta, razen za najnovejše knjige! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (041) 721 264.



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 43/5

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz pete številke 43. letnika Preseka je **Prelomni algoritem.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Davor Florjan iz Tabora, Mateja Knap iz Preserja in Timotej Vesel iz Velenja, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

Beli oblaki

Aleš Mohorič

→ **Zakaj so oblaki beli? Oblake sestavlja prozorna voda. Kar nalijte jo v kozarec in se prepričajte. Tudi zrak, v katerem so vodne kapljice, je prozoren. Pa vendar, vsi smo že videli bele oblake. Kaj je razlog za to belo barvo?**

V oblakih so kapljice vode ali kristalčki ledu zelo majhni. Njihova povprečna velikost je od 10 do 20 mikrometrov. To je nekajkrat manjše od debeline lasu. Velikost kapljic je tudi odvisna od vrste oblaka, vendar so kapljice v oblaku tipično 10 do 1000-krat manjše od dežnih kapljic; kapljice v oblaku predstavljajo le milijoninko njegove prostornine. Večino vode oblak vsebuje v obliki pare. Kakšno vlogo ima velikost kapljic pri barvi oblaka?

Naredimo poskus s koščkom prav tako prozornega stekla (slika 1 zgoraj), ki ga razbijemo s kladivom. Tega ne delajte sami zaradi nevarnosti, da kak droben košček zaide v oči ali vas kako drugače poškoduje. Uporabil sem zaščitna očala in steklo sem zavil v papirnato brisačo. Ko steklo razbijemo na drobne koščke, opazimo, da dovolj majhni koščki postanejo beli (slika 1 spodaj).

SLIKA 1.
Kos prozornega stekla (zgoraj) razbijemo na manjše koščke. Če so koščki dovolj majhni in so zbrani na kupček, so videti beli (spodaj).

Skrivnost beline je torej v množici zelo majhnih koščkov. V oblaku so to vodne kapljice. Ko na njih vpada bela sončna svetloba, se svetloba na teh delcih sipa. Sipanje pomeni kakršnokoli spreminjanje smeri žarka. Smer žarka se lahko spremeni zaradi loma, odboja ali uklona. Kateri od pojavov prevladuje, je odvisno od velikosti kapljic in valovne dolžine svetlobe. Valovna dolžina vidne svetlobe je od štiri do sedem desetink mikrometra. Če se svetloba sipa na zelo majhnih delcih, npr. atomih ali molekulah, ki so tipično manjši od tisočine mikrometra, torej tisočkrat manjši od valovne dolžine svetlobe, potem se močneje sipa modra kot rdeča svetloba. Zato je Sonce rumenkasto do rdeče, ko je nizko nad obzorjem, nebo pa modro, ko ga opazujemo v smeri stran od Sonca. Če so delci večji od valovne dolžine svetlobe, npr. kapljice v oblaku so skoraj stokrat večje, se svetloba vseh barv sipa enako. Pri večjih kapljicah, ko dežuje, je sipanje svetlobe posledica loma in enkratnega odboja. Če je plast kapljic dovolj tanka, da se večina žarkov sipa le enkrat, bomo lahko videli mavrico. Pri manjših kapljicah, kot so v oblaku, k sipanju prispeva tudi uklon in tipičen žarek, ki doseže naše oko, se sipa na ogromnem številu kapljic. Takrat se vse barve sončne svetlobe zlijejo v belo. Če opazujemo oblak osvetljen z rdečo barvo sončnega zahoda, bo seveda tudi oblak videti rdeč (oglejte si naslovnico prejšnje številke).

Kaj pa, če bi bil oblak sestavljen iz obarvane vode? Bi bil bel, ali barvit? Premislite.

× × ×

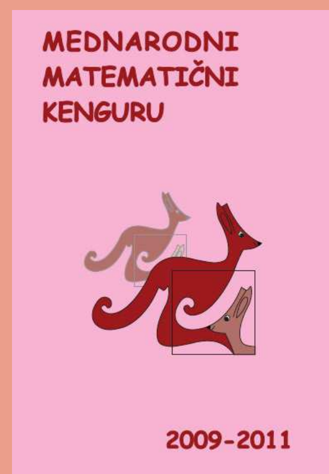
Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru z več kot 6 milijoni tekmovalcev iz 47 držav sveta v letu 2011. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

10,99 EUR

18,74 EUR



14,50 EUR

Pri DMFA-založništvo so v Presekovi knjižnici izšle že 4 knjige Matematičnega kenguruja.

- *Evropski matematični kenguru 1996–2001* (pošlo),
- *Evropski matematični kenguru 2002–2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.