

VODENJE PROMETA S SPREMENLJIVIMI OMEJITVAMI HITROSTI Z UPORABO KONTINUITETNIH MAKROSKOPSKIH MODELOV

VARIABLE SPEED LIMIT CONTROL USING CONTINUUM MACROSCOPIC MODELS

asist. dr. Irena Strnad, univ. dipl. inž. grad.

irena.strnad@fgg.uni-lj.si

izr. prof. dr. Marijan Žura, univ. dipl. inž. grad.

marijan.zura@fgg.uni-lj.si

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Jamova 2, Ljubljana

Znanstveni članek

UDK 519.711:656.05(497.4)

Povzetek | V članku je predstavljena izvirna metoda za vodenje prometa s spremenljivimi omejitvami hitrosti na podlagi kontinuitetnih makroskopskih modelov. Uporaba kontinuitetnih modelov ponuja možnost za vključitev dejanskih vzrokov za nastanek udarnih valov v vodenje prometa, vendar hkrati pomeni bistveno bolj kompleksen problem. Matematično gledano, tak način vodenja prometa predstavlja problem optimalnega vodenja. Ker je dinamični sistem opisan s sistemom parcialnih diferencialnih enačb, ki v splošnem ni analitično rešljiv, je za obravnavanje takega problema potrebna kombinacija zahtevnih numeričnih metod, in sicer smo združili metodo končnih prostornin tipa MUSCL in diferencialno evolucijo. Delovanje metode smo prikazali tudi na konkretnem primeru.

Ključne besede: vodenje prometa, udarni val, kontinuitetni makroskopski model, teorija optimalnega vodenja, metoda končnih prostornin, diferencialna evolucija

Summary | This article presents variable speed limit control method based on continuum macroscopic models. While continuum macroscopic models enable integration of actual reasons for shockwaves into traffic control, it also highly increases the complexity of traffic control, because it generates an optimal control problem. Moreover, the corresponding optimal control problem deals with finding a control policy for a dynamic system consisting of systems of partial differential equations that in general cannot be solved analytically. Therefore, dealing with such a problem requires a combination of powerful numerical solution schemes, namely MUSCL type finite volume method and differential evolution. The method and its performance are demonstrated on an application example.

Key words: traffic control, shockwave, continuum macroscopic model, optimal control theory, finite volume method, differential evolution

1 • UVOD

Aktualna problematika na slovenskem avtocestnem omrežju so vsakodnevni zastoji na nekaterih najbolj obremenjenih avtocestnih odsekih. Taki zastoji prinašajo negativne ekon-

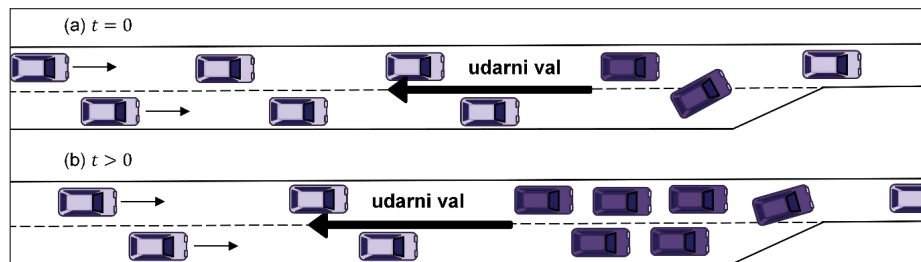
omske (izgubljeni čas, povečana poraba goriva) in ekološke posledice (povečane emisije izpušnih plinov), poleg tega pa poslabšujejo prometno varnost.

Nastanek teh zastojev je pogosto vezan na neke tipične lokacije, ki jih strokovno poimenujemo ozka grla, za katere je značilno lokalno znižanje kapacitete (npr. priključne rampe, območja prepletanj, zmanjšanje števila prometnih pasov, vzponi, predori ipd.). Kot udeleženci v prometu pogosto ne opazimo očitnega razloga za nenaden nastanek zastojev, vendar

pa jih lahko matematično in fizikalno dobro pojasnimo z nastankom udarnega vala. Ta nastane pred ozkim grlom, potuje protitočno in povzroča nenadno povečanja gostote prometnega toka ter posledično nenadno zmanjšanje srednje prostorske hitrosti prometnega toka. Z udarnim valom se tako v protitočni smeri širi zastoj, kot je razvidno s slike 1.

odstopati od ravnovesnega stanja, kar predstavlja pomembno omejitev za opis nekaterih značilnosti prometnega toka. Neravnovesne modele, ki omogočajo boljši opis prometnega toka, pa v matematični obliki predstavimo s sistemi PDE.

Najbolj osnovni kontinuitetni makroskopski model prometnega toka je model LWR



Slika 1 • Udarni val (a) v trenutku nastanka in (b) ob širjenju zastoja v protitočni smeri.

Razumevanje zakonitosti prometnega toka in vzrokov za nastanek zastojev pomeni prvi korak k njihovem preprečevanju s pomočjo ustreznega vodenja prometa. V tem članku bomo predstavili metodo za vodenje prometa s spremenljivimi omejitvami hitrosti, ki temeljijo na preprečevanju oz. zmanjševanju udarnih valov. Problem iskanja kar najbolj učinkovitega načina vodenja prometa je v zadnjih letih predmet številnih znanstvenih raziskav, saj pomeni optimizacijo izkoriščanja obstoječe infrastrukture in omogoča izboljšanje prometnih razmer brez širjenja infrastrukture in novogradenj.

Vodenje prometa s spremenljivimi omejitvami hitrosti lahko temelji na enem izmed dveh pristopov – na podlagi tako imenovane homogenizacije prometnega toka in vodenje na podlagi preprečevanja nastanka zastojev. Glavna ideja homogenizacije prometnega toka je predvsem zmanjševanje razlike v hitrosti med vozili z ustrežno omejitvijo hitrosti, posledično pa je prometni tok bolj stabilen in bolj varen. Ta pristop je bolj enostaven, vendar glede na obširne eksperimente tudi bistveno manj učinkovit (Smulders, 1990), saj rezultati kažejo, da homogenizacija prometnega toka prometno varnost poveča, vendar pa je njen vpliv na pretočnost in preprečevanje udarnih valov minimalen. Novejše raziskave zato temeljijo predvsem na napovedovanju in kontroli nastanka zastojev.

Matematično lahko nastanek udarnih valov opišemo z uporabo kontinuitetnih makroskopskih modelov prometnega toka. Razvitih je več kontinuitetnih makroskopskih modelov, ki se v osnovi delijo na ravnovesne in neravnovesne. Ravnovesni modeli so enostavnejši, saj jih sestavlja ena sama parcialna diferencialna enačba (PDE), v njih pa prometni tok ne more

((Lighthill, 1955), (Richards, 1956)), ki spada med ravnovesne kontinuitetne makroskopske modele. Poleg osnovne omejitve ravnovesnih modelov ima model LWR še nekatere pomembne omejitve, npr. nezveznost udarnih valov, trenutno pospeševanje/zaviranje vozil na končno hitrost, neupoštevanje nestabilnosti prometnega toka ter trenutnega znižanja največjega možnega pretoka. Predlaganih je bilo več numeričnih rešitev modela LWR, najpomembnejši sta model transmisije po celicah, imenovan tudi CTM (Daganzo, 1994), in metoda Godunov (Godunov, 1959). CTM omogoča formulacijo problema optimalnega vodenja, vendar je glede na omejitve modela LWR ustrezen pretežno za vodenje prometa v urbanem okolju (Grandinetti, 2013).

Drugi neravnovesni modeli nekatere omejitve odpravijo ((Lebacque, 2003), (Daganzo, 1997)), vendar zaradi osnovne omejitve ne omogočajo opisa nekaterih osnovnih mehanizmov, ki so pomembni za opis prometnega toka predvsem na večpasovnih avtocestah.

Prvi neravnovesni kontinuitetni makroskopski je model Payne (Payne, 1971). Model odpravi bistvene pomanjkljivosti ravnovesnih modelov s pomočjo uvedbo funkcije pritiska, vendar pa se oddalji od dejanskega obnašanja prometnega toka, saj ne upošteva anizotropičnosti prometnega toka. To lahko privede celo do negativnih vrednosti pretoka in hitrosti (Daganzo, 1995). Paynov model je osnova za simulacijski program METANET (Messmer, 1990), ki je najpogosteje uporabljan za probleme optimalnega vodenja. V njem je prometna mreža predstavljena kot usmerjeni graf z relativno grobo diskretizacijo (cestna mreža, razdeljena v odseke tipične dolžine 500 metrov). Taka diskretizacija omogoča upo-

rabo splošnih metod nelinearne optimizacije, kar probleme optimalnega vodenja bistveno poenostavi. Vendar pa je taka diskretizacija vprašljiva, saj nobenega matematično veljavnega postopka diskretizacije ni možno pretvoriti v obliko, ki je primerna za neposredno aplikacijo optimalnega vodenja (Jacquet, 2006). Papageorgiou (Papageorgiou, 1998) je predlagal, da se vrednost pretoka enostavno omeji s spodnjo mejo nič, s čimer model ne generira negativnih hitrosti, vendar pa se prometni tok še vedno obnaša izotropično. Kljub pomembnim pomanjkljivostim modela in diskretizacije je oblika programa META-NET ugodna za uporabo vodenja prometa s spremenljivimi omejitvami hitrosti in kontrolo dostopa na avtocestnih priključkih, zato so primeri uporabe številni ((Kotsialos, 2002), (Hegy, 2005), (Carlson, 2010), (Frejo, 2014)).

Razvitih je še precej modelov istega tipa ((Kerner, 1993), (Hoogendoorn, 1999)), ki omogočajo opis še nekaterih dodatnih mehanizmov, njihova uporabna vrednost pa je zaradi izotropije vprašljiva. V plinsko-kinetičnem modelu ((Treiber, 1999), (Helbing, 1999)) se lahko izotropičnemu opisu prometnega toka izognemo, čeprav gre za model Paynovega tipa.

Anizotropično obnašanja prometnega toka upošteva model Aw-Rascle-Zhang oziroma krajše ARZ ((Aw, 2000), (Zhang, 2002)), ki upošteva funkcijo pritiska v odvisnosti od gostote prometnega toka. Slabost tega modela je v neobstoju rešitve v primeru, ko je gostota prometnega toka enaka nič. Greenberg in Rascle ((Greenberg, 2001), (Rascle, 2002)) sta v ta model dodala relaksacijo, tj. prilagajanje hitrosti k njeni ravnovesni vrednosti po nekem relaksacijskem času. Fan in sodelavci (Fan, 2014) so razvili tako imenovani posplošeni model ARZ oziroma GARZ, ki zagotavlja, da je hitrost enaka nič le takrat, ko je gostota prometnega toka enaka maksimalni.

Kerner (Kerner, 2000) je ugotovil, da se v prometnem toku pojavljata dve kvalitativno različni vedenji oziroma dve različni fazi, ena pri nizkih gostotah prometnega toka, ko je tok prost, in druga v zgoščenem prometnem toku pri visokih gostotah prometnega toka. Na podlagi te ugotovitve je Colombo (Colombo, 2003) razvil kontinuitetni makroskopski model s faznimi tranzicijami, v katerem je predlagal model LWR za nizke gostote prometnega toka in novo razviti hiperbolični prometni model za visoke gostote prometnega toka. Goatinova (Goatin, 2006) je predlagala model LWR za nizke gostote prometnega toka in model ARZ za visoke gostote prometnega toka, s čimer

je odpravila problem rešitve modela ARZ pri gostoti nič. Blandin in sodelavci (Blandin, 2011) so predlagali združevanje modela LWR z modificiranim Colombovim hiperboličnim prometnim modelom.

Greenberg in sodelavci (Greenberg, 2003) so razvili model preklapljanja krivulje za večpasovne avtoceste s predpostavko, da se dve kvalitativno različni vedenji pojavljata, ker sta pri visokih gostotah prometnega toka menjavanje pasov in prehitavanje oteženi, medtem ko pri nizkih gostotah ni ovir. Model lahko opiše nestabilnost prometnega toka vključno z valovi ustavi-in-spelji ter dve kvalitativno različni fazi prometnega toka, matematično gledano, pa ima podobne lastnosti kot model ARZ. Kerner (Kerner, 2004) je razvil koncept teorije prometnega toka s tremi fazami: prosti prometni tok, široko gibajoči se zastoji in sinhronizirani tok. Rezultati obsežne sodobne

raziskave (Jiang, 2015) kažejo na očitno nasprotje z rezultati dvofazne teorije prometnega toka, medtem ko trifazna teorija omogoča reprodukcijo izmerjenih oscilacij hitrosti vozil. Kimathi (Kimathi, 2012) je predlagal izboljšavo modela preklapljanja krivulj glede na trifazno teorijo prometnega toka.

Kljub številnim razvitim kontinuitetnim makroskopskim modelom je vodenje prometa z vidika natančnosti modeliranja prometnega toka zelo omejeno, saj predlagani načini temeljijo na enem izmed dveh kontinuitetnih makroskopskih modelov z največ pomanjkljivostmi (LWR in Payne). Razlog je v izredni kompleksnosti matematične obravnave problema optimalnega vodenja, še posebno na podlagi kompleksnega numeričnega reševanja sistemov PDE.

V tem članku predstavljamo izvirno metodo za vodenje prometa s spremenljivimi omejit-

vami hitrosti s ciljem zmanjšati intenzivnost in pogostost pojavljanja udarnih valov. Osnovni namen je razviti metodo, ki ni vezana zgolj na uporabo enega izmed najenostavnejših kontinuitetnih modelov, temveč na splošen sistem PDE ter brez številnih poenostavitev, ki so bile uporabljene v dosedanjih raziskavah in neposredno vplivajo na natančnost opisa dinamike prometnega toka ter posledično na kvaliteto vodenja prometa. Oziroma povedano drugače, razviti želimo metodo, ki temelji na reševanju sistemov PDE z numerično metodo visoke natančnosti.

Metoda kombinira opis prometnega toka z uporabo izbranega kontinuitetnega makroskopskega modela in določitev spremenljivih omejitev hitrosti s pomočjo numeričnega reševanja problema optimalnega vodenja z algoritmom diferencialne evolucije.

namreč uporablja periodične robne pogoje, ki ne omogočajo ustrezne simulacije prometnega toka za naš namen.

Z metodo končnih prostornin tipa MUSCL (2) lahko rešujemo sisteme PDE v konserva-

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{g}(\mathbf{u}), \quad (3)$$

tivni obliki: \mathbf{u} m -dimenzionalni vektor makroskopskih spremenljivk, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ in $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ pa m -dimenzionalni vektorski funkciji, kjer je m dimenzija makroskopskega kontinuitetnega modela.

Rešitev je določena numerično, tj., simulirani odsek (a,b) najprej razdelimo na segmente z delilnimi točkami x_j^n v času t_n ; rešitve u_j^n predstavljajo povprečno vrednost

2 • METODOLOGIJA

2.1 Reševanje sistemov PDE kontinuitetnih makroskopskih modelov

Udarne valove lahko modeliramo s pomočjo kontinuitetnih makroskopskih modelov. V njih uporabljamo makroskopske spremenljivke, ki jih imenujemo tudi osnovne karakteristike prometnega toka, to so gostota prometnega toka $\rho(x,t)$, srednja prostorska hitrost prometnega toka $v(x,t)$ in pretok $q(x,t)$. Sestavni del makroskopskih kontinuitetnih modelov so tudi odvisnosti med osnovnimi karakteristikami prometnega toka, tj. hitrost v odvisnosti od gostote, pretok v odvisnosti od gostote in pretok v odvisnosti od hitrosti. Osnovne karakteristike prometnega toka so medsebojno povezane z osnovno relacijo:

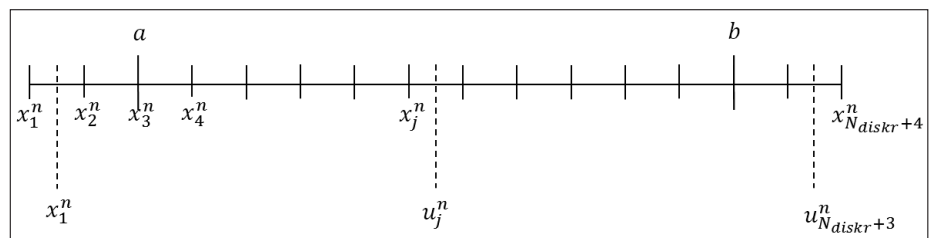
$$q(x,t) = \rho(x,t)v(x,t), \quad (1)$$

zato odvisnost med njimi popolnoma definiramo z eno samo enačbo, običajno z enačbo, s katero opisujemo odvisnost hitrosti od gostote, imenujemo jo tudi ravnovesna hitrost $v^e(\rho(x,t))$. V znanstvenem okolju je diagram pretoka v odvisnosti od gostote poimenovan fundamentalni diagram prometnega toka. Za primer fundamentalnega diagrama, ki ga bomo v tem članku tudi uporabili, lahko navedemo trikotni fundamentalni diagram (Munjal, 1971), ki je v pregledu literature na temo vodenja prometa najpogosteje uporabljan. V njem je odvisnost hitrosti od gostote podana z enačbo:

$$v^e(\rho(x,t)) = \begin{cases} v_0, & \rho \leq \rho_c \\ \frac{\rho_c}{\rho_{max} - \rho_c} v_0 \frac{\rho_{max} - \rho(x,t)}{\rho(x,t)}, & \rho_c < \rho < \rho_{max} \end{cases}$$

kjer je v_0 hitrost prostega prometnega toka, ρ_c kritična gostota (tj. gostota, pri kateri je dosežena kapaciteta), ρ_{max} pa maksimalna gostota.

Poleg odvisnosti med karakteristikami prometnega toka, kontinuitetne makroskopske modele sestavlja sistem PDE. Ti sistemi v splošnem zahtevajo numerično metodo za reševanje. Uporabili smo metodo končnih prostornin tipa MUSCL v kombinaciji z dvostopenjsko shemo Runge-Kutta, ki se za



Slika 2 • Delilne točke, dodatne točke zunaj odseka (a,b) ter rešitve u^n v času t^n ((van Dam, 2002), str. 20).

reševanje makroskopskih modelov pokaže kot izjemno natančna ((van Dam, 2002), (LeVeque, 2002)). Za podlago smo uporabili MATLAB implementacijo TRAFLOWPACK (van Dam, 2002), dodatno pa smo jo prilagodili, da smo lahko upoštevali ustrezne robne pogoje. Omenjena implementacija numerične metode

na j -tem segmentu v času t_n . Za upoštevanje robnih pogojev, moramo na vsakem robu dodati po dve dodatni delilni točki, tj., če odsek (a,b) razdelimo na N_{diskr} diskretnih točk, imamo skupno $N_{diskr} + 4$ delilnih točk. Razdelitev na segmente je prikazana na sliki 2.

Sistem PDE rešujemo ob ustreznih robnih in začetnih pogojih. Začetni pogoji morajo biti predpisani na način, ki na nadaljnje rešitve ne vpliva, tj. v pogojih prostega prometnega toka. Na koncu odseka predpostavimo homogene Neumannove robne pogoje, kar pomeni, da na robu trenutna situacija v prometnem toku ostane nespremenjena, tj.:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}(L, t) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

kjer je m število komponent vektorja \mathbf{u} (tj. dimenzija kontinuitetnega makroskopskega modela), L pa dolžina obravnavanega odseka. V numerični obliki te pogoje določimo v dodatnih točkah zunaj odseka tako, da zrcalimo vrednosti v krajnih točkah zunaj odseka z enačbo:

$$u_1^n = u_4^n, \quad u_2^n = u_3^n, \quad u_{N_{diskr}+3}^n = u_{N_{diskr}}^n, \quad (5)$$

$$u_{N_{diskr}+2}^n = u_{N_{diskr}+1}^n.$$

Če želimo simulirati dejanski promet, moramo na začetku odseka predpisati Dirichletove robne pogoje, ki omogočajo upoštevanje dejansko izmerjenih/napovedanih vrednosti:

$$u_i(0, t) = u_i(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

oziroma v numerični obliki

$$u_1^n = u_2^n = u_{emp}^n, \quad (7)$$

kjer u_{emp}^n označuje želeno izmerjeno ali napovedano vrednost na začetku odseka.

Pri tem tipu robnega pogoja se lahko pojavi problem predeterminiranosti sistema ((Treiber, 2013), (Marušić, 2009)), ko je gostota prometnega toka na začetku obravnavanega odseka v območju zgoščenega prometnega toka, tj., kolona sega čez rob. Problem lahko rešimo z dinamičnim preklapljanjem med Neumannovim in Dirichletovim robnim pogojem, in sicer glede na vrednost gostote prometnega toka v neposredni bližini roba. Tak primer sicer za vodenje prometa ni aktualen, saj z omejitvami hitrosti ne moremo nadzorovati prometa na delu odseka pred omejitvijo hitrosti.

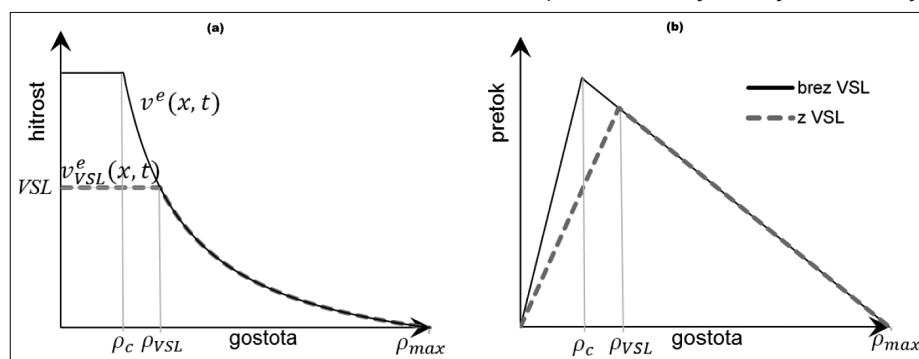
2.1.1 Vgradnja omejitve hitrosti v kontinuitetni makroskopski model

Formulacija kontinuitetnih makroskopskih modelov neposredno ne vsebuje mehanizma omejitve hitrosti, zato moramo kontinuitetni model oziroma fundamentalni diagram ustrezno prilagoditi, saj je upoštevanje vpliva določanja omejitve hitrosti bistvenega pomena za delovanje algoritma optimalnega vodenja. Najpreprostejši način, ki je bil v znanstvenem okolju sprva najpogostejši, je zamenjava vrednosti hitrosti prostega prometnega toka v_0 z vrednostjo spremenljive omejitve hitrosti VSL (angl. variable speed limit). Tak pristop

je neustrezen (Hegyi, 2005), saj postavljena spremenljiva omejitve hitrosti predstavlja le formalno zgornjo mejo za dovoljeno hitrost vozila, in ne vpliva na potek ravnovesne odvisnosti med hitrostjo in gostoto, kjer so hitrosti nižje od dovoljene. Voznik, ki vozi s hitrostjo nižjo od omejitve hitrosti, svoje hitrosti namreč zaradi omejitve hitrosti ne bo spremenil. Z enačbo lahko ravnovesno hitrosti vozila ob predpisani omejitvi hitrosti zapišemo kot (Štrnad, 2016):

$$v_{VSL}^e(\rho, VSL) = \min(VSL, v^e(\rho)). \quad (8)$$

Grafično je upoštevanje omejitve hitrosti na primeru trikotnega fundamentalnega diagrama prikazano na sliki 3.



Slika 3 • Upoštevanje omejitve hitrosti v trikotnem fundamentalnem diagramu v diagramu odvisnosti (a) hitrosti od gostote in (b) pretoka od gostote.

2.2 Teorija optimalnega vodenja

Matematično problem iskanja optimalnega načina vodenja prometa, kjer je prometni tok opisan s sistemom PDE, obravnava teorija optimalnega vodenja (Bressan, 2007). V splošnem je dinamični sistem opisan kot:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{c}(t)), \quad (9)$$

z začetnim pogojem $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. V enačbi (9) s t označujemo čas, $\mathbf{x}(t)$ stanje in s $\mathbf{c}(t)$ funkcijo vodenja. Dinamičen sistem je v našem primeru sistem PDE kontinuitetnega makroskopskega modela prometnega toka, ki so hiperbolični in dobro definirani, vendar rešitve v splošnem niso zvezne, zato je njihova nadaljnja matematična obravnava problematična. V splošnem tudi ti sistemi PDE niso rešljivi analitično, zato optimizacijski proces zahteva numerično reševanje. Funkcija vodenja je v našem primeru sestavljena iz sosledja omejitve hitrosti.

Funkcijo, ki jo želimo optimizirati, imenujemo kriterijska funkcija in jo lahko zapišemo kot:

$$J = \Phi(T, \mathbf{x}(T)) + \int_{T_0}^T \mathcal{L}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{c}(t)) dt, \quad (10)$$

kjer je T_0 začetni čas, T končni čas, Φ in \mathcal{L} pa izbrani funkciji, ki predstavljata ceno v končnem oziroma tekočem času. Kriterijsko funkcijo je v našem primeru treba določiti

tako, da bo njena optimizacija zagotovila minimizacijo udarnih valov.

2.2.1 Določitev kriterijske funkcije

Pri razvoju metode vodenja prometa se osredotočamo na pojav udarnih valov, zato moramo preudarno določiti kriterijsko funkcijo, ki se bo čim bolj nanašala na njihov pojav. V pregledu literature se kot najbolj pogosta kriterijska funkcija za optimalno vodenje prometnega toka pojavlja najmanjši skupni potovalni čas, pa tudi največja skupna prepotovana razdalja. Vendar pa eksperimenti pokažejo, da z njuno uporabo v našem primeru rezultat ni najbolj optimalen v smislu minimizacije udarnih valov. Optimalno vodenje temelji na določanju

diskretnih omejitve hitrosti, ki veljajo na nekem delu odseka v nekem časovnem intervalu. V primeru, da je udarni val ravno v fazi nastajanja, bi namreč najbolj ustrezna omejitve hitrosti na neki bistveno večji razdalji od dolžine nastajajočega udarnega valu pomenila kratkotrajno minimalno povečanje potovalnega časa in zmanjšanje pretoka na pripadajočem delu odseka. Že v naslednjih časovnih intervalih se taka omejitve hitrosti izkaže za učinkovito, a ko se udarni val enkrat pojavi, je zmožnost njegove kontrole zmanjšana.

Zato smo se odločili poiskati drugačno, bolj ciljno naravnano kriterijsko funkcijo. Colombo in Grolu ((Colombo, 2004a), (Colombo, 2004b)) sta obravnavala problem minimiziranja oscilacij v gostoti prometnega toka, tj. minimizacijo totalne variacije. Analitično sta dokazala obstoj optimalne rešitve za nekatere posebne oblike kriterijske funkcije. Glede na specifičnost formulacije njenih rezultatov ni možno neposredno uporabiti za naš problem. Totalna variacija pri različnih spremenljivih omejitvah hitrosti ni dovolj lepa, da bi zagotovila stabilno reševanje, poleg tega pa je v diskretnem okolju problematičen že izračun totalne variacije.

Zato smo se odločili, da bomo oscilacije upoštevali prek razlik med dejansko gostoto $\rho(x,t)$ in neko optimalno vrednostjo gostote ρ_{opt} , katere dejanska vrednost gostote v optimalnem primeru ne bi smela preseči. Udarni val namreč tipično nastane takrat, ko na nekem območju gostota prometnega toka preseže neko kritično vrednost. Ker želimo predpisati kazen samo v primeru, ko je gostota višja od optimalne, kriterijsko funkcijo definiramo kot:

$$J = \begin{cases} \int_0^L \int_{T_0}^{T_K} (\rho(x,t) - \rho_{opt}) dt dx, & \text{če je } \rho(x,t) > \rho_{opt}, \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases} \quad (11)$$

kjer je L dolžina odseka ter T_0 začetni in T_K končni čas izbranega časovnega intervala. Primerjajmo izbrano funkcijo z enačbo za izračun skupnega potovalnega časa iz rezultatov makroskopskega modela (oznaka TTT , iz angl. izraza Total Travel Time, podana na primer v (Treiber, 2013):

$$TTT = \int_0^L \int_0^{T_K} \rho(x,t) dt dx, \quad (12)$$

kjer je L dolžina odseka, T_K pa dolžina časovnega intervala oziroma končni čas.

Primerjava obeh funkcij pokaže, da je izbrano kriterijsko funkcijo možno fizikalno interpretirati kot skupni potovalni čas TTT z dodatnim členom $-\int_0^L \int_0^{T_K} \rho_{opt} dt dx = -TTT_{opt}$. Če postavimo vrednost ρ_{opt} na tisto vrednost gostote, pri kateri se zgoščen prometni tok pojavi (tj. kritična gostota ρ_c), nas očitno zanima le podaljševanje potovalnega časa v območju zgoščenega prometnega toka; taka kriterijska funkcija torej omogoča takojšnje zaznavo nastajajočega udarnega vala.

Glede na numerično rešitev kontinuitetnega makroskopskega modela moramo enačbo (12) preurediti v ustrezno numerično obliko. Rešitev je izračunana v n diskretnih točkah x_i , kjer je n pozitivno celo število. Če z m označimo število vseh časovnih intervalov t_j , $\rho(x_i, t_j)$ pa vrednost gostote oziroma rešitev makroskopskega kontinuitetnega modela ter z Δx_i , Δt_j velikost celice, kjer $i=1, \dots, n$ in $j=1, \dots, m$, lahko zapišemo:

$$J = \begin{cases} \sum_1^n \sum_1^m (\rho(x_i, t_j) - \rho_{opt}) \Delta x_i \Delta t_j, & \text{če je } \rho(x_i, t_j) > \rho_{opt}, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (13)$$

Velikost celice Δx_i , Δt_j na optimalno rešitev nima vpliva, saj je odvisna le od načina diskretizacije, zato jo lahko iz kriterijske funkcije izpustimo. Preudarno moramo še izbrati vrednost optimalne gostote ρ_{opt} . Smiselno je določiti vrednost ρ_{opt} na tisto vrednost gostote, pri kateri se zgoščen prometni tok pojavi, torej kritično gostoto ρ_c .

2.3 Diferencialna evolucija

Za reševanje problema optimalnega vodenja moramo izbrati ustrezno numerično metodo za optimizacijo. Za globalno optimizacijo numeričnih problemov se izkaže kot ustrezen (Onwubolu, 2004) algoritem diferencialne evolucije oziroma krajše DE, ki sta ga razvila Storn in Price (Storn, 1997). Ta omogoča iterativno obravnavanje problema optimalnega vodenja brez analitičnega izračuna ali ocene gradienta.

Glede na različne strategije mutacije in križanja je bilo razvitih več različic algoritma DE (Jayakumar, 2011), ki se medsebojno razlikujejo v načinu iskanja rešitve. Posledično izbor ustrezne različice vpliva na konvergenco algoritma h globalnemu minimumu oziroma maksimumu. Glede na primerjavo med različicami ((Mezura-Montes, 2006), (Jayakumar, 2011)) ter teoretične dokaze dobrega konvergenčnega obnašanja ((Dasgupta, 2009), (Ghosh, 2002)) smo izbrali različico DE rand/1/bin.

Koraki algoritma DE po različici DE rand/1/bin so:

- Inicializacija: generacija začetne populacije vektorjev $x_{i,G}$, $i=1, 2, \dots, NP$ dimenzije D , pri čemer z NP označimo krmilni parameter, ki predstavlja velikost populacije. Vsako iteracijo označimo z zaporedno številko G , začenši z 0.

- Mutacija: določamo mutiran vektor $v_{i,G}$, $i=1, 2, \dots, NP$ za vsak vektor $x_{i,G}$ v populaciji.

$$v_{i,G} = x_{r_1^i,G} + F(x_{r_2^i,G} - x_{r_3^i,G}), \quad (14)$$

kjer je F krmilni parameter, ki predstavlja faktor skaliranja. V enačbi (14) nastopajo trije naključno izbrani začetni vektorji z indeksi r_1^i , r_2^i , r_3^i , ki so med seboj različni ter različni od tekočega indeksa i .

- Križanje: določamo vektor $w_{i,G}$, $i=1, 2, \dots, NP$, ki ga dobimo z rekombinacijo posameznih komponent vektorjev $x_{i,G}$, $i=1, 2, \dots, NP$ v populaciji in pripadajočih mutiranih vektorjev

$$w_{i,j,G} = \begin{cases} v_{i,j,G}, & \text{če } \text{rand}(0,1) \leq CR \text{ ali } j = j_{rand}, \\ x_{i,j,G}, & \text{sicer,} \end{cases} \quad (15)$$

kjer funkcija $\text{rand}(0,1)$ označuje enakomerno porazdeljeno slučajno spremenljivko na $(0,1)$, j_{rand} naključno izbran indeks med 0 in D , ki zagotavlja, da bo vsaj ena komponenta novega vektorja enaka komponenti mutiranega vektorja, CR pa krmilni parameter, ki pred-

stavlja verjetnost križanja.

- Selekcija: generacija nove populacije glede na vrednost kriterijske funkcije $J(w_j)$ oziroma $J(x_j)$;

$$x_{i,G+1} = \begin{cases} w_{i,G}, & \text{če je } J(w_{i,G}) < J(x_{i,G}), \\ x_{i,G}, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (16)$$

Če je izpolnjen predpisani zaključitveni pogoj, potem je algoritem DE končan, sicer začnemo novo iteracijo.

Na podlagi raziskav (Zaharie, 2002) in dodatnega testiranja na konkretnih primerih smo za optimizacijo izbrali vrednosti krmilnih parametrov $CR=0,7$, $F=0,8$ ter $NP=20$, s katerimi algoritem izkazuje hitro in učinkovito konvergenco k optimalni rešitvi.

2.4 Numerična implementacija

Programsko kodo za določanje optimalnih omejitev hitrosti smo napisali v okolju MATLAB verzije 9.3 (R2017b, The Mathworks, Inc., Natick, MA). Ogradnje programske kode predstavlja algoritem diferencialne evolucije po varianti DE rand/1/bin, opisan v razdelku 2.3, s katerim rešujemo probleme optimalnega vodenja (razdelek 2.2), kjer je dinamični sistem podan s sistemom PDE (razdelek 2.1).

Prometno povpraševanje podajamo prek robnih pogojev tako, da za neki kratek časovni interval (npr. minutni interval) upoštevamo izmerjene/napovedane podatke prek Dirichletovih robnih pogojev. Nato se z algoritmom diferencialne evolucije obravnava problem optimalnega vodenja, pri čemer se v vsakem koraku znova numerično izračuna rešitev kontinuitetnega makroskopskega modela z metodo končnih prostornin tipa MUSCL. Rešitev algoritma diferencialne evolucije so optimalne omejitve hitrosti v eni ali več diskretnih točkah v naslednji minuti. Te diskretne točke v praksi predstavljajo lokacije portalov spremenljive prometnoinformativne signalizacije, na katerih lahko prikazujemo spremenljive omejitve hitrosti. Algoritem nato ponavljamo za vsakokratni minutni interval z uporabo novega robnega pogoja in izvornih členov vse do konca simulacije. Programska koda v okolju MATLAB omogoča večjedrno optimizacijo, s čimer skrajšamo čas računanja.

3 • PRIMER

Zgoraj opisano metodologijo smo uporabili na testnem primeru avtocestnega odseka dolžine 2,5 km, kjer ozko grlo predstavlja zožitev s treh vozniških pasov na dva vozna pasova na lokaciji 2,3 km. Na odseku smo določili dve lokaciji, na katerih predpisujemo spremenljive omejitve hitrosti, in sicer 200 metrov in 1600 metrov. Robni pogoji, s katerimi podamo prometne obremenitve na začetku odseka, in spremenljive omejitve hitrosti se lahko spreminjajo vsako minuto.

Uporabili smo model LWR s trikotnim fundamentalnim diagramom z običajnimi vrednostmi parametrov v literaturi; $v_0 = 120$ km/h $\rho_c = 25$ voz/km in $\rho_{max} = 160$ voz/km.

Osnovna enačba modela LWR se glasi:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

Enačba (17) velja za skupno gostoto, tj. gostoto na vseh pasovih skupaj. Ker je prometno stanje odvisno od gostote na enem pasu, bomo obravnavali gostoto na povprečni pas, ki jo dobimo kot količnik skupne gostote in števila pasov. Identično enačbo lahko zapišemo za primer gostote na povprečni pas za odsek brez uvoznih in izvoznih ramp in s konstantnim številom vozniških pasov. Upoštevanje ramp ter sprememb v številu pasov je možno z uporabo izvornih členov na desni strani enačbe (17) (Treiber, 2013). Z upoštevanjem osnovne relacije med makroskopskimi spremenljivkami (1) in izvornih členov zaradi spremembe števila vozniških pasov lahko model LWR zapišemo z enačbo:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho(x,t)v^e(\rho(x,t)))}{\partial x} = \frac{\rho(x,t)v^e(\rho(x,t))}{l} \frac{\partial l}{\partial x} \quad (18)$$

kjer je l število pasov. Desna stran enačbe (18) je različna od nič samo v območju spremembe števila vozniških pasov.

Model LWR vsebuje predpostavko, da hitrost nikoli ne odstopa od ravnovesne hitrosti, oziroma:

$$v(x,t) = v^e(\rho(x,t)), \quad (19)$$

kjer z v označujemo dejansko hitrost prometnega toka, z v^e pa funkcijo hitrosti v odvisnosti od gostote.

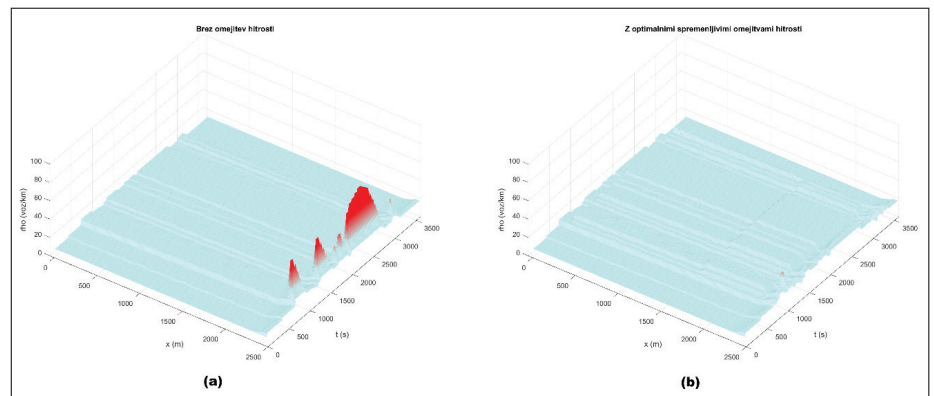
Izdelali smo enourno simulacijo za dva primera prometnih obremenitev, ki na območju zožitve povzročata udarni val. Na začetku in koncu simulacije so izračunane optimalne omejitve hitrosti, enake 120 km/h v obeh točkah, kar je enako hitrosti prostega prome-

tnega toka. To pomeni, da ob nizkih prometnih obremenitvah v prostem prometnem toku hitrosti ne omejujemo. Hitrost začnemo omejevati, ko z rešitvijo sistema PDE ugotovimo, da bi brez omejitve hitrosti začel nastajati udarni val. Optimalne omejitve hitrosti, ki jih program izračuna, se gibljejo od 60 km/h do 120 km/h; program ne izbira vrednosti pod 60 km/h.

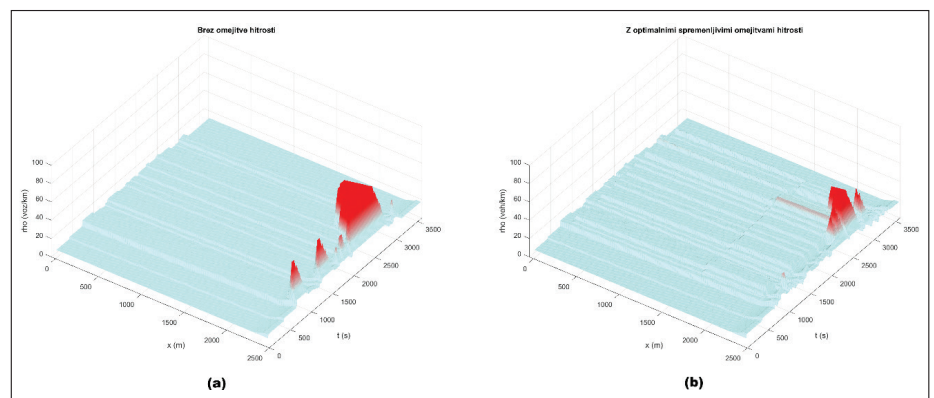
Slika 4 in 5 prikazujeta gostoto prometnega toka v prostoru in času brez omejitev hitrosti ter z omejitvami hitrosti, ki jih izračuna algoritem. V obeh primerih prometnih obremenitev se brez omejitev hitrosti pojavljajo udarni valovi; na slikah 4 in 5 levo lahko namreč vidimo, da se na območju zman-

jšanja števila vozniških pasov nenadoma pojavi visoka gostota prometnega toka. V primeru, da se dovolj visoke prometne obremenitve nadaljujejo, udarni val potuje protočno in območje visoke gostote je čedalje daljše. V prvem primeru (slika 4) lahko vidimo, da z izračunanimi omejitvami hitrosti udarni val praktično preprečimo. Tega pa ne moremo storiti vedno, tako v drugem primeru (slika 5), ko je udarni val hujši, le-tega omilimo, tj., zmanjšamo njegovo dolžino in trajanje.

Reševanje problema optimalnega vodenja je v našem primeru zelo hitro; eksperimenti so pokazali, da pri uporabi programske kode na štirijedrnem procesorju (procesor Intel(R) Core(TM) i7-7700 CPU @ 3.60 GHz, 3.60 GHz, 4 jedra, 8 logičnih procesorjev) za optimizacijo zadostuje 10 sekund, tj. v realnem času.



Slika 4 • Gostota v prostoru in času za prvi primer prometnih obremenitev (a) brez omejitve hitrosti in (b) z optimalnimi omejitvami hitrosti.



Slika 5 • Gostota v prostoru in času za drugi primer prometnih obremenitev (a) brez omejitve hitrosti in (b) z optimalnimi omejitvami hitrosti.

4 • RAZPRAVA IN SKLEP

Učinkovito vodenje prometa bi lahko prispevalo k izboljšanju prometnih razmer brez širjenja infrastrukture in novogradenj. Namen tega prispevka je bil predstaviti metodo za vodenje prometa s spremenljivimi omejitvami hitrosti na avtocestah, ki temelji na zmanjšanju intenzivnosti in pogostosti pojavljanja udarnih valov. Matematično udarne valove modeliramo s sistemi PDE kontinuitetnih makroskopskih modelov, nastali problem optimalnega vodenja pa obravnavamo s pomočjo diferencialne evolucije.

Delovanje metode je prikazano na primeru avtocestnega odseka z enim ozkim grlom, kjer je prometni tok modeliran z modelom LWR. Reševanje problema optimalnega vodenja je v tem primeru hitro in omogoča aplikacijo v realnem času. Simulacije z izračunanimi spremenljivimi omejitvami hitrosti so v izbranih primerih prometnih obremenitev pokazale pomembno zmanjšanje ali celo preprečitev pojava udarnega vala, kar kaže na ustrezno določeno kriterijsko funkcijo.

Ekspirimenti so pokazali, da program ne izbira vrednosti pod 60 km/h, čeprav so te v množici rešitev. Take omejitve hitrosti so v vodenju prometa potencialno ustrezne le znotraj zastojev iz drugih vzrokov, medtem ko udarnega vala ne morejo preprečiti, ob njihovi uporabi v neustreznih okoliščinah pa ga lahko celo povzročijo. Neustrezno vodenje prometa ima lahko tudi negativne učinke, eden takih je prenizka omejitev hitrosti ob neprimernem času, ki lahko vodi

v nov udarni val (Hegyi, 2005). Program se temu izogne zaradi definicije kriterijske funkcije. Prikazani primer služi prikazu delovanja metode in ne praktični aplikaciji, saj je uporabljen osnovni model LWR. Ta model ima sicer več omejitev; trenutno pospeševanje ali zaviranje na končno hitrost (brez upoštevanja reakcijskega časa in omejenega pojemka/pospeška), neupoštevanje mehanizma trenutnega znižanja največjega možnega pretoka (angl. capacity drop, po nastanku udarnega vala je v realnosti pretok skozi ozko grlo nižji od maksimalnega možnega pred nastankom udarnega vala) in nerealna oblika udarnih valov (konstanta amplituda namesto valov ustavi-in-spelji). Te omejitve lahko vplivajo tudi na učinkovitost metode vodenja prometa v makroskopski simulaciji. Medtem ko je zaradi neomejenega pojemka/pospeška lahko učinkovitost vodenja prometa v makroskopski simulaciji nekoliko večja, kot bi bila dejansko, pa je zaradi neupoštevanja mehanizma trenutnega znižanja največjega možnega pretoka lahko ravno obratno. Z ustreznimi omejitvami hitrosti lahko dejansko zagotovimo, da je pretok skozi ozko grlo večji, kot bi bil po nastanku udarnega vala, kar ima lahko pomemben vpliv na vodenje prometa.

Vendar pa je treba omeniti, da se navedene omejitve pojavijo zaradi izbranega kontinuitetnega makroskopskega modela, in ne predstavljajo omejitve metode, ki v splošnem dovoljuje opis dinamike prometnega toka s katerimkoli

kontinuitetnim makroskopskim modelom, ki je s predlagano numerično metodo rešljiv. Smiselno se je torej v nadaljevanju osredotočiti na validacijo že razvitih kontinuitetnih modelov. Predlagana metoda namreč omogoča uporabo naprednejšega modela in implementacijo izboljšav v kontinuitetnem makroskopskem modeliranju, ki se v znanstvenem okolju nenehno razvijajo.

Smiselno je preučiti možnost prilagoditve predlagane metode tudi za druge načine vodenja prometa, kot je na primer kontrola dostopa na priključkih avtocest. Na karakteristike prometnega toka in medsebojne odvisnosti med njimi vplivajo še številni drugi parametri (Rijavec, 2018). Podrobno poznavanje karakterizacije prometnega toka in njena vključitev v modeliranje ponuja še večji potencial za učinkovitejše vodenje prometa, kar prav tako nakazuje smer nadaljnjega raziskovanja.

Učinkovitost vodenja prometa z omejitvami hitrosti se v realni situaciji sooča s težavo upoštevanja predpisane omejitve hitrosti pri voznikih. Ena izmed možnosti doseganja boljše učinkovitosti vodenja prometa je sistematično predpisovanje nižje vrednosti od določene optimalne, ki pa lahko, dolgoročno gledano, povzroči negativno dožemanje ustreznosti in vnaprejšnji negativen odnos do omejitev hitrosti. Čeprav bi lahko bila učinkovitost v praksi trenutno zaradi neupoštevanja omejitev hitrosti precej manjša, pa je pomen metode toliko večji z vidika prihajajočih tehnologij, kot je inteligentno prilagajanje hitrosti ISA (angl. intelligent speed adaptation/assist), ki zajema prepoznavo prometnih znakov in prilagajanje hitrosti, ter v končni fazi avtomatskih vozil.

5 • LITERATURA

- Aw, A., Rascle, M., Resurrection of "second order" models of traffic flow, *SIAM journal on applied mathematics*, 60, 3, 916–938, 2000.
- Blandin, S., Work, D., Goatin, P., Piccoli, B., Bayen, A., A general phase transition model for vehicular traffic, *SIAM journal on Applied Mathematics*, 71, 1, 107–127, 2011.
- Bressan, A., Piccoli, B. Introduction to the Mathematical Theory of Control, *AIMS Series on Applied Mathematics*, Vol. 2., American Institute of Mathematical Sciences, Springfield, 2007.
- Carlson, R.C., Papamichail, I., Papageorgiou, M., Messmer, A., Optimal motorway traffic flow control involving variable speed limits and ramp metering, *Transportation Science*, 44, 2, 238–253, 2010.
- Colombo, R.M., Hyperbolic Phase Transitions in Traffic Flow, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63, 2, 708–721, 2003.
- Colombo, R.M., Grolí, A., Minimising stop and go waves to optimise traffic flow, *Applied Mathematics Letters*, 17, 6, 697–701, 2004a.
- Colombo, R.M., Grolí, A., On the optimization of a conservation law, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 19, 3, 269–280, 2004b.
- Daganzo, C.F., The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory, *Transportation Research Part B: Methodological*, 28, 4, 269–287, 1994.

- Daganzo, C.F., Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow, *Transportation Research Part B: Methodological*, 29, 4, 277–286, 1995.
- Daganzo, C.F., A continuum theory of traffic dynamics for freeways with special lanes, *Transportation Research Part B: Methodological*, 31, 2, 103–125, 1997.
- van Dam, A., A moving mesh finite volume solver for macroscopic traffic flow models, Internal report TNO 02-7N-152-1500, Utrecht University Repository, Utrecht, 2002.
- Dasgupta, S., Das, S., Biswas, A., Abraham, A., On stability and convergence of the population-dynamics in differential evolution, *AI Communications*, 22, 1, 1–20, 2009.
- Frejo, J.R.D., Núñez, A., De Schutter, B., Camacho, E.F., Hybrid model predictive control for freeway traffic using discrete speed limit signals, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 46, 309–325, 2014.
- Ghosh, S., Das, S., Vasilakos, A.V., Suresh, K., On convergence of differential evolution over a class of continuous functions with unique global optimum, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics PART B*, 42, 1, 107–124, 2002.
- Goatin, P., The Aw–Rascle vehicular traffic flow model with phase transitions, *Mathematical and computer modelling*, 44, 3, 287–303, 2006.
- Grandinetti, P., Canudas de Wit, C., Garin, F., An efficient one–step–ahead optimal control for urban signalized traffic networks based on an averaged Cell–Transmission model, 2015 European Control Conference (ECC), IEEE, Linz, Austria, 15–17 July 2015, 3478–3483, 2015.
- Greenberg, J.M., Extensions and amplifications of a traffic model of Aw and Rascle, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 62, 3, 729–745, 2001.
- Greenberg, J.M., Klar, A., Rascle, M., Congestion on multilane highways, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63, 3, 818–833, 2003.
- Hegyí, A., De Schutter, B., Hellendoorn, J., Optimal coordination of variable speed limits to suppress shock waves, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 6, 1, 102–112, 2005.
- Helbing, D., Treiber, M., Numerical simulation of macroscopic traffic equations, *Computing in Science & Engineering*, 1, 5, 89–99, 1999.
- Hoogendoorn, S.P., Multiclass Continuum Modeling of Multilane Traffic Flow, doktorska disertacija, Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Delft University Press, 1999.
- Jacquet, D., Canudas de Wit, C., Koenig, D., Optimal Control of Systems of Conservation Laws and Application to Non–Equilibrium Traffic Control, Proceedings of the 13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation, Paris, France, 26–28 April 2006, 2006.
- Jeyakumar, G., Shanmugavelayutham, C., Convergence Analysis of Differential Evolution Variants on Unconstrained Global Optimization Functions, *International Journal of Artificial Intelligence & Applications*, 2, 2, 116–127, 2011.
- Jiang, R., Hu, M.B., Zhang, H.M., Gao, Z.Y., Jia, B., Wu, Q.S., On some experimental features of car–following behavior and how to model them, *Transportation Research Part B: Methodological*, 80, 338–354, 2015.
- Kerner, B.S., Konhäuser, P., Cluster effect in initially homogeneous traffic flow, *Physical Review E*, 48, 4, 2335–2338, 1993.
- Kerner, B.S., Phase transitions in traffic flow. *Traffic and Granular Flow'99*, Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, str. 253–283, 2000.
- Kerner, B.S., *The Physics of Traffic, Empirical Freeway Pattern Features, Engineering Applications and Theory*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- Kimathi, M.E., *Mathematical Models for 3–Phase Traffic Flow Theory*, doktorska disertacija, University of Kaiserslautern, Universitätsbibliothek Kaiserslautern, Kaiserslautern, 2012.
- Kotsialos, A., Papageorgiou, M., Mangeas, M., Haj–Salem, H., Coordinated and integrated control of motorway networks via non–linear optimal control, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 10, 1, 65–84, 2002.
- Lebacque, J.P. Two–phase bounded–acceleration traffic flow model: Analytical solutions and applications, *Transportation Research Record*, 1852, 220–230, 2003.
- LeVeque, R.J. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge university press, Cambridge, 2002.
- Lighthill, M.J., Whitham, G.B. On kinetic wave II: a theory of traffic flow on crowded roads, *Proceedings of the Royal Society of London, A* 229, 1178, 317–345, 1955.
- Marušić, S., A note on boundary conditions for the LWR model, *Promet – Traffic&Transportation*, 21, 6, 379–386, 2009.
- Messmer, A., Papageorgiou, M., METANET: a macroscopic simulation program for motorway networks, *Traffic Engineering & Control*, 31, 466–470, 1990.
- Mezura–Montes, E., Velázquez–Reyes, J., Coello Coello, C.A., A comparative study of differential evolution variants for global optimization, *GECCO '06 Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, Seattle, Washington, USA, 8–12 July 2006, 485–492, 2006.

- Munjal, P.K., Hsu, Y.S., Lawrence, R.L., Analysis and validation of lane-drop effects of multilane freeways, *Transportation Research*, 5, 4, 257–266, 1971.
- Onwubolu, G.C., Babu, B.V., *New optimization techniques in engineering*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- Papageorgiou, M., Some remarks on macroscopic traffic flow modelling, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 32, 5, 323–329, 1998.
- Payne, H.J., *Models of freeway traffic and control*, Simulation Councils Proceedings Series: Mathematical models of public systems, 1, 51–60, 1971.
- Rasclé, M., An improved macroscopic model of traffic flow: derivation and links with the Lighthill–Whitham model, *Mathematical and computer modelling*, 35, 5, 581–590, 2002.
- Richards, P.I., Shock waves on the highway, *Operations Research*, 4, 1, 42–51, 1956.
- Rijavec, R., Šemrov, D., Effects of Weather Conditions on Motorway Lane Flow Distributions, *Promet – Traffic&Transportation*, 30, 1, 83–92, 2018.
- Smulders, S., Control of freeway traffic flow by variable speed signs, *Transportation Research Part B: Methodological*, 24, 2, 111–132, 1990.
- Storn, R., Price, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces, *Journal of Global Optimization*, 11, 4, 341–359, 1997.
- Strnad, I., Kramar Fijavž, M., Žura, M., Numerical optimal control method for shockwaves reduction at stationary bottlenecks, *Journal of Advanced Transportation*, 50, 5, 841–856, 2016.
- Treiber, M., Hennecke, A., Helbing, D., Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, nonlocal traffic model, *Physical Review E*, 59, 1, 239–253, 1999.
- Treiber, M., Kesting, A., *Traffic Flow Dynamics, Data, Models and Simulation*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.
- Zaharie, D., Critical values for the control parameters of Differential Evolution algorithms, *Proceedings of Mendel 2002, 8th International Conference on Soft Computing*, Brno, University of Technology, 62–67, 2002.
- Zhang, H.M., A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior, *Transportation Research Part B: Methodological*, 36, 3, 275–290, 2002.