

DRŽAVNI SISTEM RAVNINSKIH PRAVOKOTNIH KOORDINAT (Predlog zasnove za R Slovenijo)

Dr. Miroslav Peterca

Ljubljana

Prispelo za objavo: 24.5.1993

Izvleček

Za državni sistem ravninskih pravokotnih koordinat je predlagan sistem Gauss-Kruegerjevih koordinat, ki se geometrično naslanja na GKP razširjene meridianske cone. Zaradi boljše izkoriščenosti koordinatnih zapisov je treba spremeniti koordinatno izhodišče. Za povezavo z Evropo naj bi bil UTM (Universal Transverse Mercator).

Ključne besede: Gauss-Kruegerjeva projekcija, sistem ravninskih pravokotnih koordinat, Slovenija, UTM, zasnova

UVOD

Termin „sistem ravninskih pravokotnih koordinat“ vsebuje geodetsko-kartografsko projekcijo in sistem ravninskih pravokotnih koordinat, ki sloni na projekciji kot geometrični podlagi. Prispevek obravnava:

- matično projekcijo in sistem ravninskih pravokotnih koordinat za območje R Slovenije in
- sistem za povezavo matičnega sistema z Evropo.

Geografski položaj R Slovenije

Če se za mejne meridiane in paralele vzamejo zunanji okvirji listov TK 25, zavzema Slovenija naslednji geografski prostor:

$$\begin{array}{ll} \lambda_W = 13^\circ 22' 30'' & \varphi_N = 46^\circ 52' 30'' \\ \lambda_E = 16^\circ 37' 30'' & \varphi_S = 45^\circ 22' 30'' \\ \lambda_E - \lambda_W = 3^\circ 15' & \varphi_N - \varphi_S = 1^\circ 30'' \end{array}$$

Projekcijski položaj R Slovenije

- Položaj v Gauss-Kruegerjevi projekciji:

$$\begin{array}{ll} \text{Srednji meridian sistema:} & \lambda_0 = 15^\circ \\ \text{Širina meridianske cone:} & 3^\circ 15' \\ & \lambda_0 - \lambda_W = \lambda_E - \lambda_0 = 1^\circ 37' 30'' \end{array}$$

- Položaj v sistemu UTM-ja (Universal Transverse Mercator):

$$\begin{aligned} \text{Srednji meridian sistema:} & \quad \lambda_0 = 15^\circ \\ \text{Širina meridianske cone:} & \quad 6^\circ \\ & \quad \lambda_0 - \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_0 = 3^\circ \end{aligned}$$

kjer sta $\lambda_1 = 12^\circ$, $\lambda_2 = 18^\circ$ mejna meridiana šeststopinjske cone.
Številka cone: 33

MATIČNA PROJEKCIJA R SLOVENIJE IN DRŽAVNI SISTEM RAVNINSKIH PRAVOKOTNIH KOORDINAT

Matična projekcija za vsa geodetska računanja, katastrsko in topografsko izmerno in kartografiranje celotnega območja R Slovenije je Gauss-Kruegerjeva projekcija meridianske cone $3^\circ 15'$ po geografski dolžini. Dejstvo, da je $\lambda_0 - \lambda_W = \lambda_E - \lambda_0 = 1^\circ 37' 30''$, še omogoča, da se po redukciji merila ($m_0 = 0,9999$) na celem območju preslikave obdrži natančnost 1:10 000.

Državni sistem ravninskih pravokotnih koordinat je sistem Gauss-Kruegerjevih koordinat, ki geometrično sloni na Gauss-Kruegerjevi projekciji meridianske cone. Namenjen je za enolično definiranje položaja točk v ravnini na celem območju R Slovenije. Sistem tvorita dve koordinatni osi, ki se sekata pod pravim kotom v koordinatnem izhodišču. Vertikalna ali abscisna os (X os) je projekcija srednjega meridiana cone v GKP-ju. Horizontalna ali ordinatna os (Y os) je projekcija ekvatorja v GKP-ju ali po predloženi modifikaciji: os, ki je na geografski širini $\varphi_0 \neq 0^\circ$ paralelna projekciji ekvatorja. Geografske koordinate izhodišča so torej:

$$\lambda_0 = 15^\circ, \lambda - \lambda_0 = 0^\circ, \varphi_0 = 0^\circ$$

ali po modifikaciji

$$\lambda_0 = 15^\circ, \lambda - \lambda_0 = 0^\circ, \varphi_0 > 0^\circ.$$

Pravokotne koordinate izhodišča so:

$$\begin{aligned} y_0 &= 0,0 \text{ m, pogojno } 500\,000 \text{ m} \\ x_0 &= 0,0 \text{ m.} \end{aligned}$$

V nasprotju z geografskimi koordinatami φ in λ na elipsoidu je sistem ravninskih pravokotnih Gauss-Kruegerjevih koordinat izometričen in enak Descartesovemu koordinatnemu sistemu.

PROJEKCIJSKI SISTEM ZA POVEZAVO Z EVROPO

Za povezavo lokacij na območju R Slovenije z Evropo naj se uporablja UTM sistem, ki vsebuje:

- Prečno Mercatorjevo (Gauss-Kruegerjevo) projekcijo 6° meridianskih con in
- UTM pravokotno koordinatno mrežo, ki sloni na Prečni Mercatorjevi projekciji kot geometrijski osnovi.

Pripomba: Razumljivo, direktna povezava z Evropo ni možna brez predhodne povezave astronomsko-geodetskih mrež ali transformacije s pomočjo skupnih podatkov.

Splošne specifikacije za UTM

Meje con: UTM cone so omejene z meridianom n. 6° vzhodno ali zahodno od Greenwicha, kjer je $n = 0, 1, 2 \dots 30$.

Izhodišče geografskih koordinat: $\lambda - \lambda_0 = 0^\circ$, $\varphi_0 = 0^\circ$, kjer je λ_0 geografska dolžina srednjega meridiana cone.

Izhodišče pravokotnih koordinat:

$$\begin{aligned}y_0 &= 0,0 \text{ m, pogojno } 500\,000 \text{ m} \\x_0 &= 0,0 \text{ m, za severno hemisfero}\end{aligned}$$

Širinske meje sistema: $84^\circ\text{N}, 80^\circ\text{S}$

Označevanje con: od 1-60, z začetkom 180° W

Modul merila na srednjem meridianu: $m_0 = 0,9996$

ENAČBE GAUSS-KRUEGERJEVE (PREČNE MERCATORJEVE) PROJEKCIJE

Najbolj praktična oblika računalniško usmerjenih enačb je še vedno vrsta polinomskih aproksimacij. Čeprav se poskuša priti do tako imenovanih „zaprtih“ enačb, ki bi bile za računalniško uporabo najbolj učinkovite, rezultati še niso zadovoljivi. Tako imenovana ameriška oblika enačb zagotavlja zahtevano stopnjo natančnosti za cono $\pm 4^\circ$ do srednjega meridiana. Pri uporabi ožjih con in na naših geografskih širinah se nekateri členi lahko izpustijo:

$$x = m_0 \{ B - B_0 + N \operatorname{tg} \varphi [A^2/2 + (5 - T + 9C + 4C^2) A^4/24 + (61 - 58T + T^2 + 600C - 330e^2) A^6/720] \} \quad (1)$$

$$y = m_0 N [A + (1 - T + C) A^3/6 + (5 - 18T + T^2 + 72C - 58e^2) A^5/120] \quad (2)$$

$$m = m_0 [1 + (1 + C) A^2/2 + (5 - 4T + 42C + 13C^2 - 28e^2) A^4/24 + (61 - 148T + 16T^2) A^6/720] \quad (3)$$

v katerih so:

m_0 = modul merila na srednjem meridianu (0,9999 za GKP, 0,9996 za UTM)

$$e^2 = e^2/(1 - e^2) \quad (4)$$

$$N = a/(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \quad (5)$$

$$A = (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi, \text{ z } \lambda \text{ in } \lambda_0 \text{ v radianih} \quad (6)$$

$$T = \operatorname{tg}^2 j \quad (7)$$

$$C = e^2 \cos^2 \varphi \quad (8)$$

$$\begin{aligned}B &= a [(1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256 - \dots) \varphi - (3e^2/8 + 3e^4/32 + \\&\quad + 45e^6/1024 + \dots) \sin 2\varphi + (15e^4/256 + 45e^6/1024 + \dots) \sin 4j - \\&\quad - (35e^6/3072 + \dots) \sin 6\varphi + \dots] \quad (9)\end{aligned}$$

j v radianih.

B je razdalja vzdolž srednjega meridiana od ekvatorja do širine φ .

B_0 je B izračunano za φ_0 , širino paralele, ki seka srednji meridian λ_0 v izhodišču y in x koordinat. Izhodišče koordinat v Prečni Mercatorjevi projekciji namreč ne leži vedno na ekvatorju, temveč je prilagojeno območju preslikave. V primeru GKP-ja v naši sedanji rabi in šeststopinjskih UTM con je $B_0 = 0$.

Enačba (3) za merilo m se lahko napiše tudi kot funkcija od y in φ :

$$m = m_0 [1 + (1 + e'^2 \cos^2 \varphi) y^2 / (2m_0^2 N^2)] \quad (3a)$$

Enačbe za obratno nalogo:

$$\varphi = \varphi_1 - (N_1 \operatorname{tg} \varphi_1 / M_1) [D^2/2 - (5 + 3T_1 + 10C_1 - 4C_1^2 - 9e'^2) D^4/24 + (61 + 90T_1 + 298C_1 + 45T_1^2 - 252e'^2 - 3C_1^2) D^6/720] \quad (10)$$

$$\lambda = \lambda_0 + [D - (1 + 2T_1 + C_1) D^3/6 + (5 - 2C_1 + 28T_1 - 3C_1^2 + 8e'^2 + 24T_1^2) D^5/120] / \cos \varphi_1 \quad (11)$$

kjer je φ_1 širina točke na srednjem meridianu, ki ima isto vrednost abscise x kot točka φ, λ . Računa se po enačbi:

$$\varphi_1 = \mu + (3e_1/2 - 27e_1^3/32 + \dots) \sin 2\mu + (21e_1^2/16 - 55e_1^4/32 - \dots) \sin 4\mu + (151e_1^3/96 + \dots) \sin 6\mu \quad (12)$$

v kateri so

$$e_1 = [1 - (1 - e'^2)^{1/2}] / [1 + (1 - e'^2)^{1/2}] \quad (13)$$

$$\mu = B/[a(1 - e'^2/4 - 3e'^4/64 - 5e'^6/256 - \dots)] \quad (14)$$

kjer je

$$B = B_0 + x/m_0 \quad (15)$$

z B_0 , izračunanim po enačbi (9) za dano φ_0 . Če se izhodišče pravokotnih koordinat nahaja v točki $\varphi_0 = 0^\circ, B_0 = 0$.

$$e'^2 = e^2/(1 - e^2) \quad (4)$$

$$C_1 = e'^2 \cos^2 \varphi_1 \quad (16)$$

$$T_1 = \operatorname{tg}^2 \varphi_1 \quad (17)$$

$$N_1 = a/(1 - e'^2 \sin^2 \varphi_1)^{1/2} \quad (18)$$

$$M_1 = a(1 - e'^2)/(1 - e'^2 \sin^2 \varphi_1)^{3/2} \quad (19)$$

$$D = y/(N_1 m_0) \quad (20)$$

Pripomba: širina φ_1 se, razen po enačbi (12), z uvajanjem pomožne, t.i. rektificirane širine μ , lahko izračuna tudi po enačbi (9) za dani x . Postopek iteracije je opisan v viru (Borčič 1976).

DOPUSTNA ŠIRINA GAUSS-KRUEGERJEVE CONE IN DEFORMACIJE

Pod pogoji $m_0 = 0,9999$ in $d \leq 0,0001$, se za geografske širine R Slovenije dobijo naslednje dopustne vrednosti $\lambda - \lambda_0$:

φ	45°22'30''	46°00'00''	46°52'30''
$\lambda - \lambda_0$	1°37'43''	1°38'49''	1°40'25''

Iz tabele je razvidno, da se v coni 3°15' po geografski dolžini obdrži natančnost 1 : 10 000. Na novih mejnih meridianih $\lambda - \lambda_0 = \pm 1^\circ 37' 30''$ se za iste širine dobijo naslednje vrednosti merila m oziroma relativnih deformacij d :

φ	45°22'30''	46°00'00''	46°52'30''
m	1,000 099	1,000 095	1,000 088
d	1 : 10 100	1 : 10 500	1 : 11 400

MODIFICIRANJE PRAVOKOTNIH KOORDINAT

Da bi dosegli večjo smotrnost zapisov ravninskih pravokotnih koordinat, je možna ena od naslednjih modifikacij:

a) Ker so na ozemlju R Slovenije vse $\varphi > 45^\circ$, se izhodišče sistema za izpisovanje RPK-ja iz točke $\lambda_0, \varphi_0 = 0^\circ$, prestavi v točko $\lambda_0, \varphi_0 = 45^\circ$. Abscise se ne štejejo od ekvatorja, temveč od točke, v kateri paralela $\varphi_0 = 45^\circ$ seka projekcijo srednjega meridiana. Abscise se računajo po enačbi (1), v kateri je B_0 dolžina srednjega meridiana od ekvatorja do širine $\varphi_0 = 45^\circ$. Prehod iz starih (prej izračunanih) v nove abscise se izvaja po enačbi

$$x = x_t - m_0 B_0,$$

kjer je x_t stara abscisa, $m_0 B_0$ pa izračunana konstanta.

b) Ker so v sedanjem sistemu vse abscise v R Sloveniji večje od 5 000 000 metrov, se začetek sistema prestavi v točko na srednjem meridianu, za katero je

$$B_0 = 5\,000\,000/m_0,$$

kar ustreza velikosti B_0 za $\varphi_0 \approx 45^\circ 09'$. S to vrednostjo B_0 se računajo abscise po enačbi (1) in rešuje obratna naloga v enačbi (15). Prehod iz starih v nove abscise se opravi po enačbi (21), v kateri je

$$m_0 B_0 = 5\,000\,000.$$

Modifikacija a) se prakticira v 22 državah ZDA, ki kot geodetsko in topografsko projekcijo uporabljajo TM (GKP) in na njej sloneč sistem pravokotnih UTM koordinat. Tako na primer za Arizono $\varphi_0 = 31^\circ 00'$, Georgio $30^\circ 00'$, Idaho $41^\circ 40'$ itd. Čeprav je bila modifikacija a) že predložena tudi za R Slovenijo (Peterca 1989), pa zaradi zelo enostavnega prehoda iz sedanjega v modificirani sistem Gauss-Kruegerjevih koordinat R Sloveniji bolj ustreza modifikacija b). Ker vrednost $m_0 B_0$ v a) ni okroglo število, se v primeru b) vse že izračunane abscise zmanjšajo za 5 000 000 metrov. Za razliko od a) ta sprememba ne spreminja položaja sedanjih trigonometričnih sekcij in delitve na liste od 1:10 000 do 1:500, za katere so okvirji listov linije pravokotne mreže. Razen tega so v ZDA leta 1950 začeli z uvajanjem popolnoma novega sistema in namesto Polikonične projekcije uvedli uporabo TM in

Lambertove konformne konične projekcije ter na teh projekcijah zasnovane sisteme ravninskih koordinat. Pri nas pa ne gre za spremembo sistema, ampak samo za njegovo modificiranje. Ker bi bilo celotno območje R Slovenije samo v enem koordinatnem sistemu oziroma eni Gauss-Kruegerjevi coni, bi se pri izpisovanju vrednosti ordinat izpustila številka 5, ki je dosedaj označevala številko cone.

Primer označevanja Gauss-Kruegerjevih koordinat

Stari način:	$y = 5\,576\,979,6$	Novi način:	$576\,979,6$
	$x = 6\,132\,590,1$		$132\,590,1$

Opis pravokotne mreže na topografskih kartah:

Stari način:	$55\,77$	$51\,33$
Novi način:	$5\,77$	$1\,33$

Viri:

Borčić, B., 1976, Gauss-Kruegerjeva projekcija meridijanskih cona, Zagreb, 38-39.

Newton, S.D., 1985, Computer Programs for Common Map Projections, U.S. Geological Survey Bulletin 1642, 23-33.

Peterca, M. et al., 1974, Kartografija, Beograd, 213-223.

Peterca, M., 1989, Transfer podatkov med kartami in načrti različnih kartografskih preslikav s posebnim ozirom na SR Slovenijo, Informacijski sistem v geodetski službi, 21, 30-31, 38.

Snyder, J.P., 1982, Map Projections Used by the U.S. Geological Survey, Geological Survey Bulletin 1532, 53-69.

*Recenzija: Ana Kokalj
prof.dr. Branko Rojc*