

PREPROST MODEL PREOBLIKOVANJA UDORNIC

(Z 3 SLIKAMI IN 2 PRILOGAMA)

**A SIMPLE MODEL OF THE COLLAPSE
DOLINES TRANSFORMATION**

(WITH 3 FIGURES AND 2 ANNEXES)

FRANCE ŠUŠTERŠIČ

SPREJETO NA SEJI
RAZREDA ZA NARAVOSLOVNE VEDE
SLOVENSKE AKADEMIJE ZNANOSTI IN UMETNOSTI
DNE 5. JUNIJA 1984

Vsebina

Izvleček — Abstract	109 (3)
UVOD	109 (3)
PROSTORSKA PREDSTAVITEV UDORNIC	112 (6)
DEFINICIJA UDORNICE	118 (12)
ENAČBA PLAŠČNICE	121 (15)
PRAKTIČNA UPORABA ENAČBE PLAŠČNICE	125 (19)
SKLEP	128 (22)
LITERATURA	129 (23)
A SIMPLE MODEL OF THE COLLAPSE DOLINES TRANSFORMATION (Summary)	131 (25)

Naslov — Address

FRANCE ŠUSTERŠIČ, dipl. ing. geol., asistent
Inštitut za raziskovanje krasa ZRC SAZU
Titov trg 2
66230 Postojna
Jugoslavija

Izvleček

UDK 551.44:513.768

Šušteršič France: Preprost model preoblikovanja udornic.

Avtor predstavlja matematični model preoblikovanja udornic, kjer je edini proces regresija pobočij. Najprej razvija merske parametre, ki nam podajo velikost in starostno stopnjo udornic. Ugotavlja, da jih potrebujemo pet. V nadaljnjem utemelji podrobnejšo formalno klasifikacijo udornic, nato pa izpelje enačbo plašča, to je živoskalnih pobočij, pokopanih pod melišči. Ugotavlja, da je oblika plašča edini kazalec zgodovine udornic. V zadnjem delu uporablja prej razvite enačbe za praktične izračune, ki jih zahteva vsakodnevno speleološko delo.

Abstract

UDC 551.44:513.768

Šušteršič France: A simple model of the collapse dolines transformation.

The author exposes a mathematical model of the collapse dolines transformation, if slope regression is the only active process. Firstly he develops the measuring parameters, needed to determine the dolines size, age and shape. He states that five parameters are crucial. As well he uses them to construct a more precised formal collapse dolines classification. The central point of the paper is the envelop (solid rock slopes buried under the scree) equation development. He states that the envelop is the only doline history estimator. In the last part the equations developed are used to some practical calculations, needed in every day speleology.

UVOD

Pričujoča razprava v marsičem temelji na mojih dosedanjih proučevanjih udornih pojavov v krasu (F. Šušteršič, 1968, 1973, 1974), vendar ni njihovo neposredno nadaljevanje. Na tem mestu skušam predvsem ugotoviti, kakšna je idealna oblika plašča, to je živoskalne ploskve, v katere se ostenja nadaljujejo pod melišči. Plašč je pri proučevanju centričnih kraških globeli posebnega pomena. Na njem je dobesedno zapisana zgodovina, medtem ko so melišča in ostenja kazalec, kje v svoji zgodovini se trenutno nahaja udornica, ki jo opazujemo.

Ker gre za pionirsko delo, se poslužujem čim enostavnejšega geometrijskega modela, prirejenega doslej zbranemu znanju o udornicah — pač v želji, da ostane tudi rezultat čim preglednejši. To pomeni, da bodo nadaljnja proučevanja privedla do zapletenejših modelov. Ti bodo bolj prilagojeni podrobno-stim, ki jih bodo razkrile nadaljnje terenske meritve, le osnovno načelo bo ostalo nedotaknjeno. Zato moramo praktične postopke, razvite v zadnjem poglavju, razumeti kot izračunavanje teoretskih približkov, ki se stanju v naravi prilagajajo pač toliko, kolikor se z njim sklada uporabljeni model.

Vsebina razprave je dovolj enovita, da bralcu prej navedenih člankov ni potrebno poznati. Pač pa zahtevata sama narava problema in izbrana pot proučevanja (matematično modeliranje), da vsaj približno pozna načela višje matematike, kot se predava na naših tehniških fakultetah (I. Vidav, 1975, 1976/a, 1976/b).

Delo je tako predvsem teoretično. Izpeljal sem enačbo plašča oz. njegovega preseka z navpično ravnino, to je plaščnice. Odtod sem izpeljal več praktično uporabnih obrazcev, npr. enačbo sprememb prostornine po polmeru in enačbo največjega možnega polmera. Prav tako sem razčistil nekatere podrobnosti pri

preslikovanju realnih udornic, tako da je izenačevanje merjenih in modelnih parametrov kolikor se da utemeljeno.

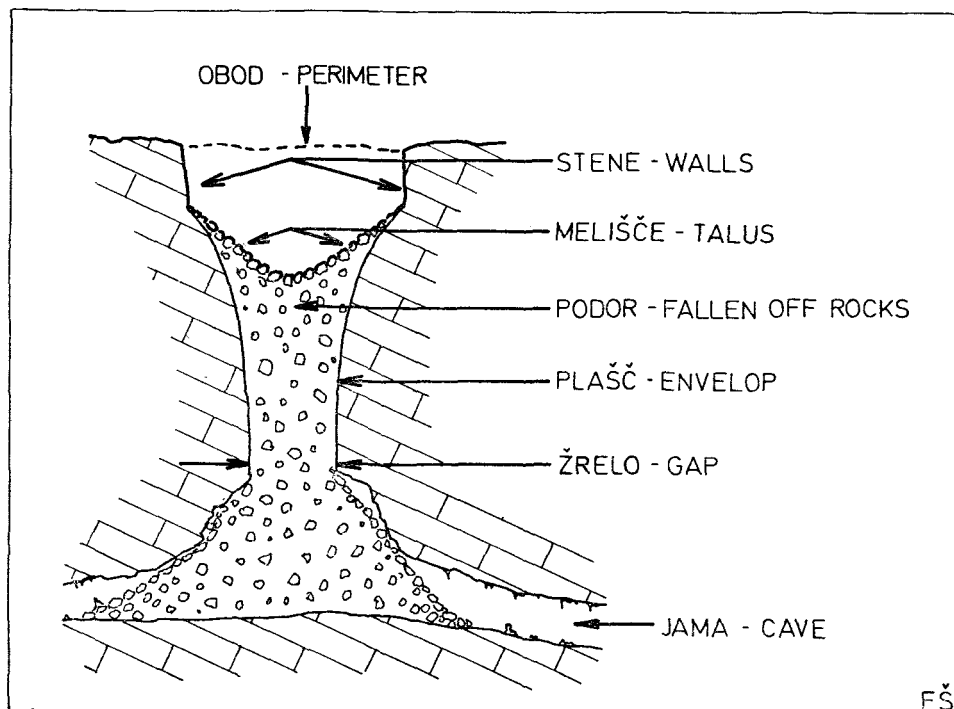
Matematično modeliranje zahteva tudi geomorfološko čista in jasna izhodišča. Med zaprtimi kraškimi globelmi srednjih velikosti daleč prevladujejo vrtače in udornice, ki se od globeli večjih izmer razlikujejo predvsem po svoji centričnosti. To pomeni, da skuša razvoj njihovih pobočij uravnotežiti točkovno motnjo v površju, ki je nastala s točkovno ojačanim odhajanjem mase v globino. V čistem krasu (F. Šušteršič, 1982) sploh vsa masa odhaja navpično, centrične kraške globeli pa nastajajo na mestih, kjer je ta proces glede na okolico sorazmerno močnejši. Proces pospešenega odnašanja mase naj bi bila po dosedanjem znanju (H. Cramer, 1941, C. d'Ambrosi, 1961) v primerih vrtač in udornic različna in to je tudi izhodišče za njihovo vsebinsko razlikovanje. Zlasti je to nazorno v zahodnoevropskih terminologijah. Anglosasi npr. ločujejo »solution dolines« (= vrtače) od »collapse dolines« (= udornice).

Dokler traja kraško odstranjevanje mase, o centričnih kraških globelih težko govorimo kot o površinskih pojavih. Dosti bolje zadenemo, če jih imamo za površinske projekcije podzemskega zakrasevanja. V času pa, ko se ta proces ustavi in se skušajo uravnotežiti dotlej le pogojno stabilna pobočja, ne da bi odhajalo v globino kaj več mase, gre nedvomno za povsem površinske procese, ki pa niso kraški.

V nadaljnjem se posvečam tisti razvojni fazi, ko oblikujejo kraško globel le še površinski procesi in se mase premeščajo, ne da bi odhajale v globino; torej tedaj, ko je globel v celoti površinski pojav. Zato se da večino ugotovitev uporabiti tako pri proučevanju udornic, kot pri proučevanju vrtač. Vendar pa tako izključujemo poprejšnje dogajanje. Uporaba izključno termina »udornica« v nadaljnjem besedilu torej ni povsem utemeljena. Novega, ustrežnejšega izrazoslovja nisem uvajal predvsem zato, da bi ne rušil enotnosti s predhodnimi deli, pa tudi zato, ker so proučevani procesi pri udornicah dosti bolj opazni, kot pri vrtačah.

Brez pomena tudi ni dejstvo, da prihaja v terminologiji do drugačnih vsebinskih premikov. Kraške terminologije (npr. I. Gams et al., 1973, 29) se pri opisih gesel pravzaprav strinjajo, da našemu izrazu »udornica« ustreza anglosaški izraz »collapse doline«. (Vsebinsko enako tudi M. M. Sweeting, 1972, 64—65). Boljši poznavalci vsakdanjega angleškega jezika so pač opazili, da naši »udornici« bolj pritiče angleški pogovorni izraz »shake hole«, vendar ga strokovne terminologije večinoma odsvetujejo. Še manj so zadeve čiste v sami literaturi. Že od P. Lavallovih (1967, 1968) del, preko del H. Mc. Connella in J. M. Horna (1972) lahko zaznamo težnjo, da bi izrazu »collapse doline« priredili pomen naših »aluvialnih vrtač« ali »grezov«. V najnovejših delih (Ph. Kemmerly, S. K. Towe, 1978, Ph. R. Kemmerly, 1980) pa je to zapisano že eksplicitno. Očitno je definicija prešla z dogajanja v matični kamnini na dogajanje v krovlini — ali pa je to veljalo že od nekdaj in smo se ves čas napačno razumeli. Uvajanje nadaljnjih terminoloških sprememb v takem trenutku, bi po mojem mnenju predvsem povečalo zmedo, četudi bi bilo morda teoretično upravičeno.

Zato so tudi vprašanja identifikacije kolikor mogoče, potisnjena na stranski tir. Ugotovitve ustrezajo pač pojavom, za katere veljajo postavljena



Sl. 1. Uporabljena terminologija o podrobnostih v udornicah
 Fig. 1. The terminology about the collapse dolines details used

izhodišča. Ukvarjamo se torej s centričnimi globelmi, katerih stene se krushijo, nikakor pa ne plazijo ali podirajo v večjih blokih. Ob enem pa se moramo zavedati, da nas zanima oblikovanje živoskalnega plašča v času, ko odvajanja mase skozi žrelo ni več.

Vprašanju terminologije in identifikacije je blizu vprašanje, kakšne količine uporabljam pri nadaljnjem razmišljanju. Logično jih lahko razdelimo v tri skupine. V prvo spadajo vse tiste, ki jih merimo na udornicah v naravi, oz. jih izpeljemo neposredno iz merskih podatkov. V nadaljnjem jih opredeljujem s pridevnikoma »merski« ali »izmerjen«.

Skladne so jim količine, s katerimi opisujemo matematični model udornice. Ker je ta model geometrijsko pravilen, izhaja iz te pravilnosti še nekaj dodatnih parametrov, ki jih lahko definiramo samo na modelu. Vse te količine zaznamujem v nadaljnjem besedilu s pridevnikom »modelni«. Pri preračunavanju resničnih udornic izenačimo ustrezne izmerjene in modelne količine.

Pri čisto teoretskih razglabljanjih uporabljam brezdimenzionalne parametre, ki se v tehniški praksi zaradi svoje enostavnosti uporabljajo v vse večjem obsegu. Ker jih dobimo z normiranjem modelnih količin, jih imenujem »normirane«, včasih tudi »brezdimenzionalne«.

Razprava je razdeljena v štiri poglavja. V prvem uvajam nekoliko prikladnejši način zapisa neposrednih merskih podatkov o udornici, oz. njeni prostorski predstavitvi. Podani so tudi količinski odnosi med merskimi podatki in uporabljenim modelom. V naslednjem poglavju uporabljam nekatere prej uvedene prijeme, da bi tako podrobneje definirali globeli, povezane z udiranjem in podiranjem kraških votlin. Tretje poglavje je posvečeno podrobni geometrijski obdelavi najenostavnejšega modela udornice, oz. izpeljavi enačbe plašča. Zadnje poglavje je posvečeno praktični uporabi izpeljanih obrazcev. Da bi bila ta čim učinkovitejša, je večina preračunavanj skržena na uporabo štirih osnovnih operacij, za reševanje zapletenejših enačb pa so rešitve izračunane na diagramih. Tako uporabniku niti ni potrebno posebno matematično predznanje. Dovolj je, da sledi navodilom, ki jih ilustrirajo primeri z našega krasa.

Podrobna terminologija, ki jo uporabljam pri opisovanju udornic, temelji na oni, ki sem jo razvil že prej (F. Šušteršič, 1974). Da pa ne bo potrebno listati po stari literaturi, je na sliki 1. povzeto vse, kar je potrebno vedeti za razumevanje naslednjega besedila.

PROSTORSKA PREDSTAVITEV UDORNIC

Prostorsko oblikovitost geomorfnihi pojavov, torej njihovo geometrijo, za beležimo tako, da izmerimo linearne koordinate točk, ki smo jih spoznali za informativno pomembne. Običajno uporabljamo Gauss-Krügerjev koordinatni sistem. Tako dobimo tabelo števil, iz katere moramo šele izluščiti tiste parametre, ki kot spremenljivke vstopajo v različne enačbe.

Pri izboru teh parametrov, moramo upoštevati dve temeljni zahtevi. Biti morajo enolično določljivi in biti morajo stabilni. Prva zahteva ne potrebuje posebnih pojasnil. Po danem predpisu, ki naj bo po možnosti čim enostavnejši, moramo pri zaporednih merjenjih iste udornice vedno dobiti enak rezultat. To je pri kontroliranih, laboratorijskih razmerah samoumevno, v naravi pa nam včasih zadaja precej preglavic.

Druga zahteva, stabilnost, pa pomeni, da mora biti izbrani parameter sorazmerno neobčutljiv za slučajne motnje. Prav tu geomorfologi največkrat grešijo, saj se vse preradi naslanjajo na t. i. ekstremne vrednosti (I. S. Evans, 1972, 20), ki so lahko določljive, a žal najbolj nestabilne. Končno se moramo spomniti še na trivialno zahtevo, da parametrov, ki z morfologijo udornic niso povezani, pač ne bomo uporabljali. To vsekakor ne zahteva nadaljnjih pojasnil.

V nadaljnji razpravi se opiram na pet osnovnih parametrov. Koeficient razrahljivosti in stabilnostni kot melišč pojasnjujeta že sama termina. Njuni vrednosti moramo ugotoviti eksperimentalno. Težišče prostora med mejnimi ploskvami (pobočji) je s svojimi koordinatami nosilec položaja udornice v prostoru. Iz prostornine izvajam tudi velikostni modul, s katerim množimo brezdimenzionalne enačbe, da dobimo praktično uporabne količine. Delež sten, ki nam že intuitivno služi kot merilo starosti udornic, pa uporabljam, da dobim osnovna razmerja tudi na modelu. Ta parameter, pri katerem gre za razmerje med površino sten in melišč, je tudi izhodišče za izpeljavo enačbe plašča, za katerega smo že zapisali, da je pravzaprav zapis zgodovine udornice.

Pri površinskih razmerjih se takoj srečamo z vprašanjem, kako jih čim bolj izmeriti. To vsekakor ni težko, kadar imamo opraviti s teoretičnimi mo-

deli, katerih ploskve so po definiciji zvezne in gladke. S primernim številom merskih točk lahko vedno izračunamo dovolj natančen približek površine. Ploskve v naravi pa so že na pogled vegaste; s podrobnejšimi meritvami pa brž ugotovimo, da so fraktali (v smislu B. B. Mandelbrota, 1977) — da sicer objemajo končno prostornino, a imajo neskončno površino.

Tem nevšečnostim se izognemo, če ploskve udornice projiciramo na zvezno in gladko ploskev, npr. polkroglo, in jim merimo površino v projekciji. Spojnice posameznih točk postanejo glavni krogelni krogi, površine med temi ograjami pa izračunamo po običajnih postopkih sferične trigonometrije. Projekcijo na polkroglo brez težav obvladamo tudi grafično. Če jo preslikamo dalje v ravnino s pomočjo Lambertove projekcije (F. Šušteršič, 1973), se ploščinska razmerja ohranijo. Stranice posameznih ploskvev tedaj enostavno zrišemo s pomočjo Schmidtove mreže (M. D. Dimitrijević, R. S. Petrović, 1965, 8).

Neposredno projiciranje na polkroglo je enostavno, a vnaša v račun nekoliko nenatančnosti, kadar udornica ni povsem okrogla. Če je tloris nekoliko izraziteje spotegnjen, projekcijski žarki skozi točke, ki so bližje krajiščem najdaljše osi, ne prebadajo ploskev več pravokotno, temveč poševno, kar sliko v projekciji pači. Zato je koristno, da tloris udornice najprej preslikamo tako, da je v projekciji čim bolj izometričen, šele nato pa projiciramo dalje na polkroglo.

Da to dosežemo, uporabimo lastnosti lastnih vektorjev variančno-kovariančne matrike (J. C. Davis, 1973, 152—168; 478—500). Preko tlorisa udornice položimo primerno gost, enakomeren točkovni raster (sl. 2, 1/a). Vsaka točka je določena s koordinatnim parom x_i, y_i . Izračunamo jim poprečne vrednosti (težišče tlorisa) (\bar{x}, \bar{y}) , varianci (S_{xx}, S_{yy}) in kovarianco (S_{xy}):

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (1, 2)$$

$$S_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad S_{yy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad (3, 4)$$

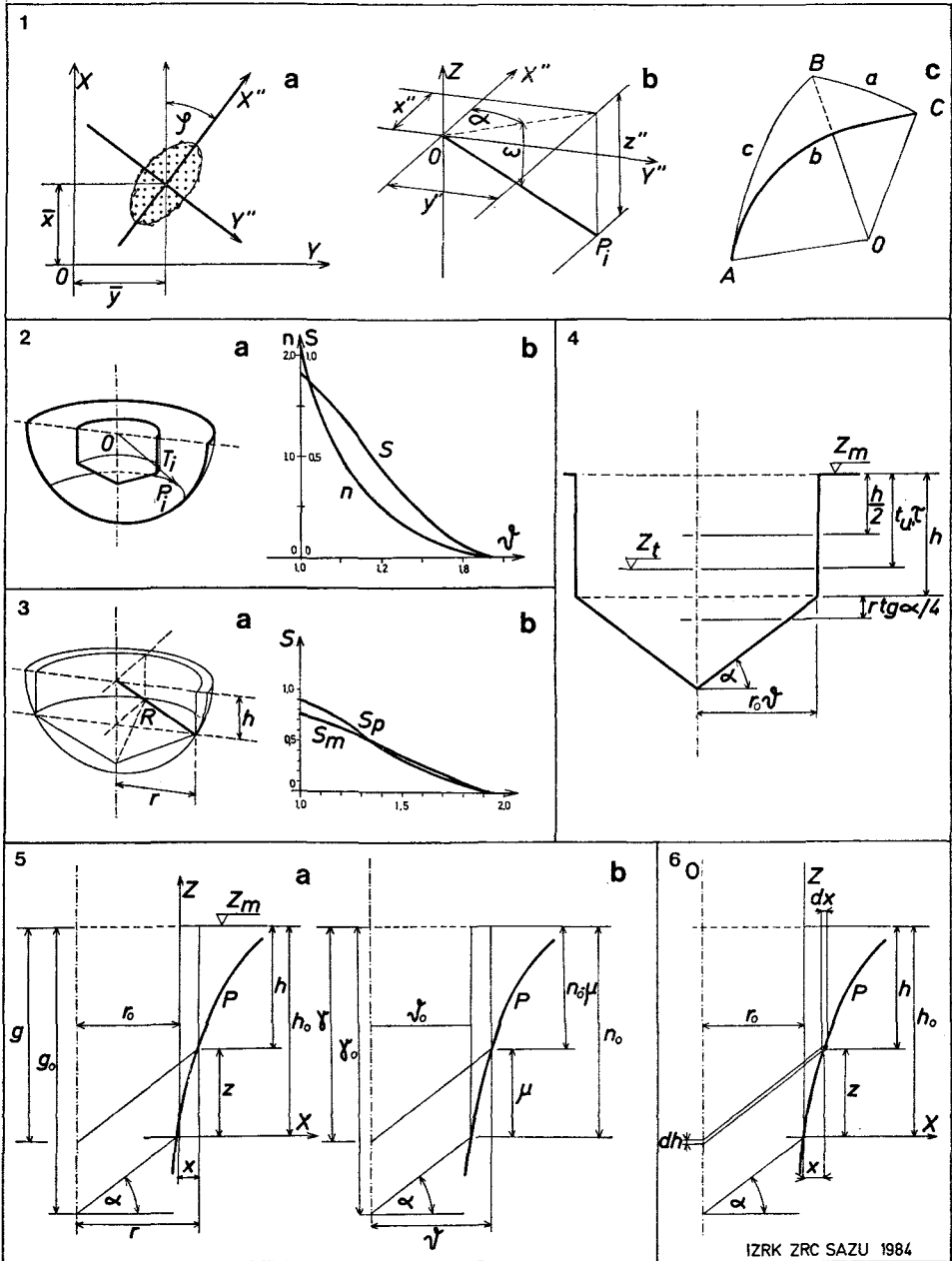
$$S_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (5)$$

nato pa sestavimo variančno-kovariančno matriko (C) (F. P. Agterberg, 1974, 126):

$$C = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Lastni vrednosti λ_1 in λ_2 izračunamo iz enačbe:

$$[C - \lambda I] = \mathbf{0} \quad (7)$$



IZRK ZRC SAZU 1984

Sl. 2. — Fig. 2.

Iz znanih lastnih vrednosti izračunamo še lastna vektorja $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$:

$$[\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}] \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (8)$$

Absolutni vrednosti obeh lastnih vektorjev sta daljša in krajša os elipse, ki se najbolj prilega množici točk, ki jih v tlorisu zaobjema ubod udornice, lastni vrednosti pa smerna koeficienta obeh osi. Postavimo koordinatni sistem tako, da se nova abscisa krije z daljšo osjo elipse, kordinatno izhodišče pa premaknimo v težišče tlorisa! Kot med absciso v Gauss-Krügerjevem koordinatnem sistemu in daljšo osjo elipse (φ) je podan v prvo lastno vrednostjo matrike \mathbf{C} in velja:

$$\varphi = \arctg \lambda_1 \quad (9)$$

Odtod lahko takoj dobimo obrazca za transformiranje koordinat (A g t e r b e r g, o. c., 113 / 4.42):

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \quad (10)$$

S x' in y' smo označili transformirani koordinatni vrednosti, \bar{x} in \bar{y} pa poznamo iz enačb (1) in (2) in sta koordinati težišča tlorisa.

Označimo z L_1 in L_2 absolutni vrednosti obeh lastnih vektorjev! Tedaj pomeni njuno razmerje $L_1 : L_2 = h$ faktor, za katerega je udornica spotegnjena vzdolž daljše osi, torej abscise v novem koordinatnem sistemu. Če naj bo udornica v tlorisu kar najbližje krožnici, moramo transformirane ordinatne vred-

- Sl. 2. 1/a Prilagajanje tlorisa udornice elipsi
 1/b Smerni koti projekcijskega žarka
 1/c Označevanje sferičnega trikotnika
 2/a Projiciranje udornice na polkroglo
 2/b Parametra S in n kot funkciji normiranega polmera
 3/a Izvajanja odnosov med parametroma S in n
 3/b Razmerje med površino modela (S_m) in površino projekcije (S_p), oboje kot funkcija normiranega polmera
 4 Osnovne mere modela udornice
 5/a Izvajanje enačbe plaščnice v linearnih koordinatah
 5/b Izvajanje enačbe plaščnice v normaliziranih koordinatah
 6 Izvajanje diferencialov prostornine kot izhodišče za enačbo plaščnice

- Fig. 2. 1/a The collapse doline ground plane adjustment to an ellipse
 1/b The directional angles of the projective ray
 1/c The spherical triangle labelling
 2/a The collapse doline projection to a hemisphere
 2/b The parametres S and n as the normalized radius functions
 3/a The relations between the parametres S and n derivation
 3/b The relations between the model area (S_m) and projection area (S_p), as related to the normalized radius
 4 The basic collapse doline dimensions
 5/a The envelop equation derivation in linear coordinates
 5/b The envelop equation derivation in normalized coordinates
 6 The volume differentials derivation, as the startpoint to the envelop equation construction

nosti pomnožiti še s h . Označimo s x'' in y'' drugič transformirane koordinate. Torej:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Naj bo z nadmorska višina poljubne točke na ploskvah udornice, z_m pa nadmorska višina najvišje točke oboda. Tedaj definirajmo z'' :

$$z'' = z - z_m \quad (12)$$

Za projiciranje na polkroglo potrebujemo koordinate posameznih točk v polarni obliki. Smerni (α) in naklonski (ω) kot radijavektorja (Sl. 2, 1/b) vsake točke dobimo iz preprostega računa:

$$\alpha = \arctg \frac{y''}{x''} \quad (13)$$

$$\omega = \arctg \frac{z''}{\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2}} \quad (14)$$

Da izračunamo ploščine posameznih projiciranih ploskev, položimo iz težišča tlorisa (torej novega koordinatnega izhodišča) skozi točke (T_i) s kordinatami x'' , y_i'' , z'' šop premic, ki nam prebada projekcijsko polkroglo v točkah P_i , kar so projekcije točk v ploskev udornice. Črte na teh ploskvah postanejo v projekciji loki glavnih krogelnih krogov med posameznimi pari točk. Ploskve, katerih projicirane površine želimo izračunati, razdelimo na sferične trikotnike, z oglišči npr. P_1 , P_2 in P_3 . Označimo kote sferičnega trikotnika takole (J. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, 1963, 219 (Slika 2, 1/c):

notranji kot $\sphericalangle P_3P_1P_2 = A$

notranji kot $\sphericalangle P_1P_2P_3 = B$

notranji kot $\sphericalangle P_2P_3P_1 = C$

središčni kot (stranica) $\sphericalangle P_2OP_3 = a$

središčni kot (stranica) $\sphericalangle P_3OP_1 = b$

središčni kot (stranica) $\sphericalangle P_1OP_2 = c$

Izberimo polmer projekcijske polkrogle (R) tako, da je daljši od najdaljšega radijavektorja (T_m), oz. $R > \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}$ in ga odslej uporabljajmo kot mersko enoto. Tedaj je ploščina sferičnega trikotnika ($S = R^2\delta$) številčno kar enaka njegovemu sferičnemu ekscesu (δ), ki je definiran takole:

$$\delta = (A + B + C) - \pi \quad (15)$$

če so koti merjeni v radianih.

Kotov A , B in C ne moremo izračunati neposredno, pač pa lahko dobimo središčne kote (a , b , c). Če označimo s T_i in P_i radijavektorje enako imenovanih točk, velja, da so vsi vektorji, označeni s P_i enotne dolžine, dobimo pa jih z normiranjem vektorjev T_i . Torej:

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{(x_i'')^2 + (y_i'')^2 + (z_i'')^2}} \cdot T_i \quad (16)$$

Tedaj je skalarni produkt dveh vektorjev \mathbf{P} enak kar kosinusu kota, ki ga oklepata:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \cos a \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_3\mathbf{P}_1 = \cos b \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \cos c \quad (19)$$

Odtod je po sferičnem kosinusu stavku (J. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, o. c., 220):

$$A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad (20)$$

$$B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} \quad (21)$$

$$C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad (22)$$

Pri projiciranju na polkroglo smo si prizadevali čim verneje opisati ploščinska razmerja ploskev udornice, zato pa so izginile njene linearne dimenzije. Tako postanejo projekcije geometrijsko podobnih udornic skladne. Navidezna neugodnost, ki jo po potrebi izravnamo z uvajanjem dopolnilnih linearnih parametrov, vsebuje tudi prednost, da lahko enako obravnavamo vse udornice, ne glede na njihovo velikost.

K povedanemu še nekaj pristavkov, ki naj osvetlijo posamezne podrobnosti. Projekcijo na polkroglo smo uvedli, da bi si olajšali obravnavo merskih podatkov. V nadaljnjem bomo proučevali enostaven model udornice, kjer so ostenja nadomeščena s krožnim valjem, melišča pa z zvrnjenim pravilnim stožcem (sl. 2, 2/a, 2, 3/a). V tem primeru projiciranje sploh ne bi bilo potrebno, saj izbrani model sam izloča fraktalnost. Pri ekvivalentnem projiciranju polkrogle v ravnino, do ploščinskih spačitev seveda ne pride; pač pa se razmerja med površinami na modelu in njihovimi pojekcijami nekoliko razhajajo (sl. 2, 3/b). Vendar razlike, kot lahko razberemo s slike, ne presežejo 10 %. V naravi je to že velikostni red možne napake zaradi slabo določljivega oboda. Po drugi strani pa je tudi res, da stene pravih udornic večinoma niso povsem navpične, temveč bolj ali manj nagnjene. Tako so prave udornice nekoliko bolj podobne polkrogli, kot model in je zato spačitev pri projiciranju manjša.

Poleg sten in melišč lahko v projekciji grafično prikažemo še vse ostale pomembne podrobnosti, kot so območja prepereline, različnih tipov matične kamnine, rastja, pa plastnice in vhode v jame. Če so ti dovolj veliki, lahko izrišemo tudi njihove obrise.

Da si olajšamo nadaljnjo razpravo, definirajmo še nekaj količin, ki stalno nastopajo pri preračunavanju. Izvedemo jih na pravkar opisanem modelu, v večji ali manjši meri pa so merljive tudi v naravi.

Vrednost S (delež sten):

$$S = \frac{P_s}{P_u} \quad (23)$$

kjer je P_s ploščina projekcije sten, P_u pa celotna ploščina znotraj projekcije oboda udornice. S je tedaj z ulomkom izražen delež sten med ploskvami udornice. Vrednost S je neposredno merilo razvojne stopnje udornice, ne glede na njeno stopnjo simetričnosti.

Definirajmo še normirani polmer:

$$\vartheta = \frac{r}{r_o} \quad (24)$$

kjer je r polmer udornice v trenutku opazovanja, r_o pa polmer udornice na prehodu iz udornega brezna v pravo udornico (glej definicije na str. 120).

Naj bo h višina sten v trenutku opazovanja, h_o pa višina sten, ki odgovarja polmeru r_o . Tedaj lahko definiramo še naslednji razmerji:

$$n_o = \frac{h_o}{r_o} \quad n = \frac{h}{r} \quad (25, 26)$$

kjer velja prvo za kritični trenutek, drugo pa za poljubno kombinacijo polmera in višine sten.

Vrednost S je parameter, enako uporaben tako na terenu, kot na modelih, razmerje n pa lahko smiselno definiramo le pri enostavnih modelih. Oba sta kazalca razvojne stopnje udornice. Njune funkcijske odnose izpeljemo iz slike 2, 3/a:

$$S = \frac{P_s}{P_u} = \frac{2\pi Rh}{2\pi R^2} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (27)$$

oziroma obratno:

$$n = \frac{S}{\sqrt{1 - S^2}} \quad (28)$$

Če označimo z M ustrežni delež projekcije melišč, seveda velja:

$$M = 1 - S = 1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (29)$$

Kako sta količini S in n odvisni med seboj in od normiranega polmera (ϑ), nam kaže slika 2, 2/b. Preden pa si te odnose ogledamo podrobneje, moramo natančneje definirati še predmet obravnave.

DEFINICIJA UDORNICE

Danes najbolj razširjene definicije udornice izhajajo iz H. E. Cramerjeve (1941, 327) opazke: »Udornica lahko kaže očitne zveze s spodaj ležečo jamo in je kot takšna potem brez nadaljnega spoznavna.« (prevod F. Š.). Slovenska kraška terminologija (I. Gams et al., 1973, 29) pravi: »Udornica. Depresijska oblika z očitnim nastankom nad votlino. Pogosto ime za udorno vrtačo.« Evropska geomorfološka praksa avtomatično dodaja zahtevo (ki jo implicitno vsebujejo tudi pisane razprave), da je votlino pod udornico izvotlila ponornica.

Drugi stavek slovenske opredelitve zahteva še nekaj pojasnil. Izraz »udornica« se je pričel pojavljati v slovenski strokovni literaturi v šestdesetih letih, kot termin, prirejen splošnemu pojmu centrične globeli, nastale s podorom stropovja nad kraško votlino.

Do danes je nadomestil prejšnja izraza, udorno vrtačo in udorno dolino, ki sta mu bila smiselno enaka. Dejansko sta prevoda nemškega Einsturzdoline in tako germanizma, ki sta upravičeno izginila iz rabe. Ker je izraz vrtača v današnjem smislu mnogo bolj alternativa izrazu udornica, kot termin za katerokoli centrično kraško globel, se pojavi vprašanje, kako poimenovati udornice, ki so že tako preoblikovane, da jih ne moremo več ločiti od vrtač. V nadaljnjem uporabljam v tem smislu izraz »globoščak«, saj se to ljudsko poimenovanje precej pokriva z razpadlimi udornicami. (Tabela 1, str. 120).

Poleg genetske razmejitev moramo potegniti tudi formalno, ki je v praksi precej dosledna. Ta šteje med brezna vse centrične globeli, katerih globina je večja ali enaka premeru (I. G a m s, o. c., F. Š u š t e r š i č, 1973, 1980). Ker je stabilnostni kot melišč manjši od 45° , je v takšno definicijo implicitno zajeta tudi zahteva, da ima brezno precejšen delež pobočij stenovitih in le manjši del melnat. V primeru, da bi se te omejitve ne držali, bi bili naenkrat tudi vsi kotlički brezna.

Izmerjena globina in zlasti premer sta izredno nestabilna parametra, saj močno zavisita od subjektivnega izbora. Le malo kraških globeli ima tako enovite obode in dneša, da bi pri zaporednih, neodvisnih meritvah vsaj približno zadeli ista razmerja med premerom in globino. Poleg tega bi ob dosledni izpeljavi gornje zahteve na modelu (valj in stožec) dobili kritično razmerje $n = 1,233$. To je mnogo manj od vrednosti, ki bi jo lahko izračunali za realne globeli, ki jih dejansko ravno še štejemo med brezna. Vsakdanji speleološki praksi je tedaj bliže ugotovitev, da so brezna tiste kraške globeli, katerih premer je manjši ali enak višini sten ($n \leq 2$). (Podrobneje glej pri F. Š u š t e r š i č, 1980).

Udornice so tedaj tiste centrične globeli, katerih n ne presega vrednosti 2, ustrezajo pa Cramerjevim (o. c.) zahtevam z gornjimi dopolnili. Tako smo namenoma izpustiti tiste redke udorne globeli, katerih n je večji od 2. Povsem umestno jih imenujemo udorna brezna, kar se sklada tudi s Slovensko kraško terminologijo (o. c., 4).

Med razvojem udornice stene izginjajo in v zadnji fazi opazujemo samo še melišča. Če udornica ni zapadla naknadnemu večanju (F. Š u š t e r š i č, 1973, 1974), skorajda ni več možnosti, da bi jo ločili od globeli, ki ji običajno pravimo vrtača. Ker ima večina vrtač v nepokritem krasu, ne glede na nastanek, vedno nekaj sten, moramo naslednjo omejitev postaviti na osnovo površinske ločljivosti. Ta je v splošnem nekje okrog vrednosti $S = 0,05$. Vse kraške globeli, ki bi jim lahko na drug način, npr. speleološko, dokazali udorni nastanek, a bodo imele manj sten (in bodo tako formalno enake vrtačam) bomo tako šteli med globoščake.

Zapisali smo, da zahteva uveljavljeni kriterij za brezna minimalno vrednost n okrog 2. Pri tem smo prezrli, da je n modelna količina, ki je v naravi ne smemo določiti. Pač pa lahko izmerimo delež sten. Iz enačbe (27) izračunamo, da vrednosti $n = 2$ odgovarja delež sten $S = 0,89$. Če pa postavimo $S = 0,90$, sledi

$n = 2,065$. Ker so razlike nepomembne, vrednost S pa je tako merski, kot modelni parameter, je smiselno, da opremo definicijo na enostavno vrednost tega parametra. Zato sprejmemo za mejni vrednosti med brezni in udornicami $S = 0,90$ oz. $n_o = 2,065$. Na meji med udornicami in globoščaki je manj težav, saj vrednosti $S = 0,05$ odgovarja $n = 0,05$. Tako lahko sestavimo Tabela 1, ki nam enolično definira vse kraške globeli podornega nastanka, ki niso bile nankadno povečane (slika 3).

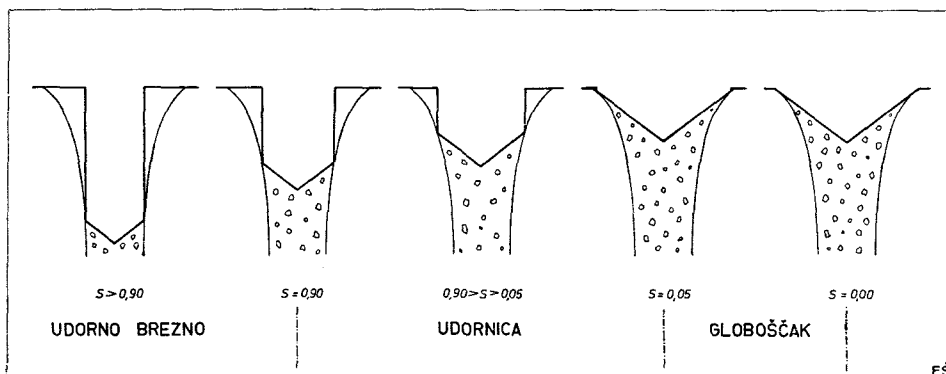
Tabela 1

Model:	Realna globel:	Termin:
$n \geq 2,065$	$S \geq 0,90$	udorno brezno
$2,065 > n \geq 0,050$	$0,90 > S \geq 0,05$	udornica
$0,050 > n \geq 0,000$	$0,05 > S \geq 0,00$	globoščak

Gornje definicije temeljijo pri kraških globelih udornega nastanka na površinski oblikovitosti in genezi, ni pa podana njuna povezava. Pri ostalih depresijskih oblikah ni govora o nastanku. Zatorej lahko pričakujemo, da bo nadaljnji študij geneze centričnih globeli prinesel spremembe gornje tabele.

Udornice so sicer površinski pojav z jasno opredeljivim nastankom, vendar nadaljevanje razvoja, ki se je pričel že v podzemlju. Zato moramo logično verigo dopolniti s pojmom centričnega podornega pojava, ki obsega vse votline ali globeli, ki so nastale tako, da so kosi matične kamnine odpadali s prvotnega mesta in se kopičili drugod, masni deficit ki ostaja, pa je približno centričen. Podorni pojavi lahko sežejo do površja, ali pa tudi ne, kar zavisi od prosotrnine prvotne dvorane, debeline stropa in matične kamnine (F. Šušteršič, 1974, 28). Tako lahko zapišemo:

- udornice so centrične udorne oblike, ki so se pojavile na površju, delež sten pa pade v interval $0,90 > S \geq 0,05$ (Tabela 1).



Sl. 3. Terminologija razvojnih stopenj udornice
Fig. 3. The collapse dolines evolutive phases terminology (in Slovene)

ENAČBA PLAŠČNICE

Ostenja udornic so v labilnem ravnotežju in se zato polagoma krušijo — udornica se širi. Če okrušeni material ne odhaja več v globino (udornica je postala v smislu prejšnjih izvajanj v celoti površinski pojav), se kopiči pod stenami v obliki melišč. Le-ta polagoma rastejo in ščitijo vse večje predele pred nadaljnjim razpadanjem. Ta mehanizem nastajanja poševnega plašča je prvi logično opisal H. E. Cramer (1941, 328), medtem ko je sam princip poznan že od prej. Za umikanje pobočij z ravnim čelom ga je predvidel že O. Fisher (1866, cit. A. Scheidegger, 1961, 88), medtem ko ga je prvi matematično modeliral O. Lehmann (1933, cit. A. Scheidegger, o. c.). Cramer je predvidel najenostavnejši model, tako da je mejna ploskev med melišči in živo skalo konična — plašč je podoben zvrnjenemu stožcu. Ta model ne upošteva resničnih procesov, temveč je samo prvi približek dejanskemu stanju.

Za nadaljnja izvajanja potrebujemo enačbe, ki upoštevajo vsaj najpomembnejše količine in njihove medsebojne odnose. Določiti želimo prvotni obseg žrela, pas okrog udornice, ki je ogrožen s potencialnim podorom in pred vsem, splošno obliko plašča.

Zamislimo si centrično simetričen živoskalen valj, višine h in polmera r (slika 2, 4), na dnu katerega je stožčasto melišče, naklonjeno za stabilnost kot α . Skupna globina znaša torej $g = h + tg \alpha$. Predpostavimo še, da je v primeri z velikostjo udornice, velikostni red osnovnih blokov kamnine zanemarljiv ter da je preoblikovanje ves čas simetrično glede na pokončno os. Če nam tak model predstavlja globel sredi povsem ravne okolice, dobimo sicer nekoliko idealiziran, a v osnovi pravilen približek udornice, kot smo ga uporabili že pri prejšnjih izvajanjih.

V primeru, da bi odkrušeni material s sten odtekal skozi žrelo udornice v globino, bi dobil plašč obliko zvrnjenega stožca, katerega konična ploskev bi bila naklonjena prav za stabilnostni kot melišča. Z vseh strmejših predlov bi se namreč okruški skotalili v žrelo, nevezano gradivo na bolj položnih pobočjih pa bi seveda ostalo v prvotnem položaju.

Če pa gradivo ne odteka, se okruški kopičijo na dnu udornice, nasipi polagoma rastejo in tako ščitijo vse večja območja žive skale pred nadaljnjim razpadanjem. Zato se naklon plašča — glede na prejšnji primer — nekoliko poveča. Prav tako ne smemo pozabiti, da zavzame nasuti material nekoliko večjo prostornino, kot jo je imel v prvotnem stanju. Novo vrednost dobimo tako, da prvotno prostornino pomnožimo s koeficientom razrahljivosti (k), ki ga moramo ugotoviti empirično.

Ker je model udornice, ki smo si ga izbrali, vrtenina, je tudi plašč v teh razmerah vrtenina. Skozi rotacijsko os postavimo navpično ravnino. Presečnica plašča s to ravnino je krivulja, ki jo v nadaljnjem imenujemo plaščnico. Zaradi enostavnosti naj poteka navpična ravnina, ki nam seka plašč, tudi skozi absciso, tako da lahko izrazimo plaščnico (P) kot funkcijo spremenljivk x in z , torej $P(x, z) = 0$, ali drugače, $z = f(x)$.

Te enačbe ne moremo zapisati kar neposredno, lahko pa konstruiramo naklon plaščnice v obliki odvoda $z' = f'(x)$. Vrednost odvoda, oz. naklona, zavisi od dveh činiteljev: od stabilnostnega kota (α) in od sprememb debeline nasu-

tine, kar zavisi posredno še od koeficienta razrahljivosti (k). Upoštevajoč sliko 2, 6, lahko zapišemo:

$$f'(x) = \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{dh}{dx} \quad (30)$$

Če se odkruši diferencialno tanka plast stene, je prostornina zrušene mase (dV_s):

$$dV_s = 2\pi (r_o + x) (h_o - z) dx \quad (31)$$

kar izpeljemo s slike 2, 5/a. Prostornina nasutnine (dV_p) je tedaj:

$$dV_p = \pi (r_o + x)^2 dh \quad (32)$$

Ker se ob presipanju prostornina materiala poveča za vrednost koeficienta razrahljivosti (k), dobimo z združitvijo gornjih dveh enačb:

$$k 2\pi (r_o + x) (h_o - z) dx = \pi (r_o + x)^2 dh \quad (33)$$

Po preureditvi dobimo:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{2k}{r_o + x} (h_o - z) \quad (34)$$

Če to vstavimo v enačbo (30) in jo nekoliko preuredimo, dobimo:

$$\frac{dz}{dx} + z \frac{2k}{r_o + x} - \left(\operatorname{tg} \alpha + h_o \frac{2k}{r_o + x} \right) = 0 \quad (35)$$

To je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda, ki ima splošno rešitev:

$$z(x) = \frac{l}{(r_o + x)^{2k}} \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k + 1} (r_o + x)^{2k+1} + h_o (r_o + x)^{2k} + C \right] \quad (36)$$

Konstanto C izračunamo iz začetnega pogoja, saj je za $x = 0$ tudi $z = 0$. Dobimo:

$$C = - \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k + 1} r_o^{2k+1} + h_o r_o^{2k} \right] \quad (37)$$

Če to vnesemo v enačbo (36), dobimo ustrezno posebno rešitev in tako enačbo plaščnice:

$$z(x) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k + 1} \left[(r_o + x) - \frac{r_o^{2k+1}}{(r_o + x)^{2k}} \right] + h_o \left[1 - \frac{r_o^{2k}}{(r_o + x)^{2k}} \right] \quad (38)$$

Skladno z že uvedenimi (str. 000, enačbe 23–26), uvedimo še brezdimenzionalni parameter:

$$\mu = \frac{z}{r_o} \quad (39)$$

Ker je $r_o + x = r$, lahko zapišemo enačbo (38) po deljenju z r_o v brezdimenzionalni obliki (Sl. 2, 5/b):

$$\mu(\vartheta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k + 1} \left[\vartheta - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right] + n_o \left[1 - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right] \quad (40)$$

To je osnovna brezdimenzionalna enačba plaščnice, kjer sta parametra stabilnosti kot melišč (α) in koeficient razrahljivosti (k). Kako odvisna je oblika plaščnice od obeh parametrov, prikazuje priloga 1.

Kakšni sta vrednosti obeh parametrov v naravi vemo le približno. Če ni posebnega opozorila, jemljem v nadaljnjem za vrednost koeficienta razrahljivosti $k = 1,25$, kar velja po gradbeniških normah za podoru slično gradivo. Za vrednost stabilnostnega kota uporabljam vrednost $\alpha = 37^\circ 30'$, ki sem jo ugotovil kot srednjo vrednost stabilnostnega kota ob meritvah dvajsetih udornic z Notranjskega krasa (F. Šušteršič, 1973).

Potencialni skrajni obod udornice (oz. v smislu Tabele 1 že globoščaka) je geometrijsko mesto, kjer sta vrednosti μ in n_o enaki, saj tedaj sten ni več. Označimo s ϑ_m skrajno možno vrednost normiranega polmera (ϑ) in vstavimo v enačbo (40). Namesto μ tedaj lahko pišemo n_o . Če obe strani pomnožimo še s ϑ_m^{2k} , dobimo:

$$n_o \vartheta_m^{2k} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k + 1} \left[\vartheta_m^{2k+1} - 1 \right] + n_o \left[\vartheta_m^{2k} - 1 \right] \quad (41)$$

odkoder dobimo po preureditvi:

$$\vartheta_m = \left[n_o \frac{2k + 1}{\operatorname{tg} \alpha} + 1 \right]^{\frac{1}{2k+1}} \quad (42)$$

Lahko izračunamo, da je pri $k = 1,25$ in $\alpha = 37^\circ 30'$, $\vartheta_m = 1,953$.

Zanima nas še naklon plaščnice na mestu, kjer stene izginejo ($\vartheta = \vartheta_m$). Tangens naklonskega kota je enak vrednosti odvoda μ po ϑ (oz. z po x) v tej točki. Slednji je podan že v enačbi (35). Ker sta na kritičnem mestu z in h_o enaka, dobimo po preureditvi:

$$z'(x) = \operatorname{tg} \alpha \quad (43)$$

ali v brezdimenzionalni obliki:

$$\frac{d\mu(\vartheta_m)}{d\vartheta} = \operatorname{tg} \alpha \quad (44)$$

Na skrajnem obodu globoščaka sta torej naklonska kota melišč in plašča enaka.

Plaščnico lahko definiramo v gornji obliki samo na modelu, v naravi pa posamezni preseki plašča z navpično ravnino od nje bolj ali manj odstopajo. Obenem pa vemo, da posamezni preseki plašča sploh niso reprezentativni. Zato moramo najti pot, kako enačbo plaščnice prilagoditi merskim podatkom, tako da bo dobljena krivulja kar najbolj sledila stanju v naravi. Ta pot vodi preko vrednosti S , saj jo lahko merimo tako v naravi, kot na modelu.

Izhajamo iz enačb (28 in 26) ter si pomagamo s sliko 2, 5/b!

$$n = \frac{S}{\sqrt{1-S^2}} \quad (28)$$

Velja tudi:

$$n = \frac{h}{r} = \frac{h_0 - y}{r} = \frac{\frac{h_0}{r_0} - \frac{y}{r_0}}{\frac{r_0 + x}{r_0}} = \frac{n_0 - \mu}{\vartheta} \quad (26)$$

Desni polovici obeh enačb izenačimo in dobimo po preureditvi:

$$\mu = n_0 - \frac{S\vartheta}{\sqrt{1-S^2}} \quad (45)$$

Namesto leve strani gornje enačbe vstavimo desno stran enačbe (40):

$$\frac{tg \alpha}{2k+1} \left[\vartheta - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right] + n_0 \left[1 - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right] = n_0 - \frac{S\vartheta}{\sqrt{1-S^2}} \quad (46)$$

odkoder dobimo po preureditvi:

$$\vartheta(S) = \left[\frac{n_0(2k+1) + tg \alpha}{\frac{S}{\sqrt{1-S^2}}(2k+1) + tg \alpha} \right]^{\frac{1}{2k+1}} \quad (47)$$

Na prilogi 2/a je ta funkcija prikazana tudi grafično.

Že na začetku smo ugotovili, da je nadmorska višina težišča udornice najstabilnejši kazalec njene absolutne višine. Ugotoviti moramo še, kakšne so razmere na modelu. Izhajamo iz označb na sliki 10 in upoštevamo, da je vrtilni moment težišča celotne udornice enak vsoti momentov obeh sestavnih delov (valja in stožca) okrog iste osi. Ker bomo računali geometrijsko mesto težišča glede na ravnino, ki nam predstavlja površje, položimo tja tudi os vrtenja.

Označimo z M_s , M_v in M_u vrtilne momente stožca, valja in modela udornice, s t_s , t_v in t_u ustrezne ročice in z V_s , V_v in V_u prostornine. Tako:

$$t_u = \frac{M_u}{V_u} = \frac{M_v + M_s}{V_v + V_s} \quad (48)$$

S slike razberemo, da velja:

$$V_v = \pi r^2 h \quad V_s = \frac{\pi}{3} r^3 tg \alpha \quad (49, 50)$$

in

$$M_v = \pi r^2 h \frac{h}{2} = \frac{\pi}{2} r^2 h^2 \quad (51)$$

$$M_s = \frac{\pi}{3} r^3 \operatorname{tg} \alpha \left(h + \frac{r}{4} \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{\pi r^3 \operatorname{tg} \alpha}{12} (4h + \operatorname{tg} \alpha) \quad (52)$$

kjer smo upoštevali, da je težišče stožca na prvi četrtini njegove višine (D. R a š k o v i ć, 1950, 357 /269/). Gornje izraze vstavimo v enačbo (48) in dobimo:

$$t_u = \frac{\frac{\pi}{12} r^3 \operatorname{tg} \alpha (4h + \operatorname{tg} \alpha) + \frac{\pi}{2} r^2 h^2}{\frac{\pi}{3} r^3 \operatorname{tg} \alpha + \pi r^2 h}$$

Po preureditvi sledi:

$$t_u = \frac{r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4 r h \operatorname{tg} \alpha + 6 h^2}{4 (r \operatorname{tg} \alpha + 3 h)} \quad (53)$$

Če delimo linearne količine v gornji enačbi z r_o , jo po prejšnjem dogovoru normirano. Upoštevajmo še definicije normiranih parametrov (str. 118) pa dobimo normirano oddaljenost težišča udornice od površja (τ):

$$\tau = \frac{1}{4} \frac{\vartheta^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4 (n_o - \mu) \operatorname{tg} \alpha + 6 (n_o - \mu)^2}{\vartheta \operatorname{tg} \alpha + 3 (n_o - \mu)} \quad (54)$$

Neodvisni spremenljivki sta v gornji enačbi ϑ in μ . Slednja je podana kot funkcija (ϑ) z enačbo (40) in na njeno mesto v enačbi (54) bi lahko vstavili izraz z desne strani enačbe (40). Vendar je računanje enostavnejše, če izračunavamo normirano oddaljenost težišča od površja (τ) postopno, v praksi pa uporabljamo kar graf gornje funkcije s priloge 2/a.

PRAKTIČNA UPORABA ENAČBE PLAŠČNICE

Ugotovitve prejšnjih poglavij lahko koristno uporabimo za preračunavanje količin, ki jih srečujemo v vsakdanji speleološki praksi. Prvi korak k temu pa je, da poiščemo zvezo med normiranimi, modelnimi in merskimi količinami. Iz normiranih količin preidemo v modelne tako, da jih množimo z vrednostjo polmera na prehodu iz udornega brezna v udornico (r_o), ta polmer pa izračunamo iz predpostavke, da sta modelna in izmerjena prostornina udornice enaki. Merjeno prostornino (V_i) dobimo po kakem ustaljenem postopku (npr. P. J a k o p i n, 1981) iz neposrednih merskih podatkov. To izenačimo z modelno prostornino (V_m), ki je podana z enačbo (upoštevamo sl. 4/a):

$$V_m = \pi r^2 h + \pi r^2 \frac{1}{3} r \operatorname{tg} \alpha \quad (55)$$

Po preureditvi dobimo ob upoštevanju definicij s strani 118:

$$\begin{aligned} V_m &= \pi \left[r^2 (h_o - y) + \frac{1}{3} r^3 \operatorname{tg} \alpha \right] = \\ &= \pi \left[(\vartheta r_o)^2 (n_o r_o - \mu r_o) + \frac{1}{3} (\vartheta r_o)^3 \operatorname{tg} \alpha \right] \end{aligned} \quad (56)$$

Vstavimo namesto μ desno stran enačbe (40) in izpostavimo r_o !

$$\begin{aligned} V_m &= r_o^3 \pi \left\{ \vartheta^2 \left\{ n_o - \left[\frac{tg \alpha}{2k+1} \left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right) + n_o \left(1 - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right) \right] \right\} + \frac{1}{3} \vartheta^3 tg \alpha \right\} = \\ &= r_o^3 \left\{ \pi \left[\vartheta^3 tg \alpha \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2k+1} \right) + \vartheta^{2-2k} \left(\frac{tg \alpha}{2k+1} + n_o \right) \right] \right\} \quad (57) \end{aligned}$$

Imenujemo izraz v zavitem oklepaju, skladno z že uvedenimi normiranimi parametri, normirana prostornina (V_n). Tedaj lahko zapišemo:

$$V_m = V_n r_o^3 \quad (58)$$

Normirana prostornina (V_n) je v smislu enačbe (57) funkcija normiranega polmera (ϑ), tega pa izračunamo s pomočjo enačbe (47) iz merjene vrednosti S . Velikostni modul r_o , s katerim množimo normirane linearne parametre, da dobimo njihove modelne vrednosti, lahko izračunamo iz nekoliko preurejene enačbe (58):

$$r_o = \sqrt[3]{\frac{V_m}{V_n}} = \sqrt[3]{\frac{V_i}{V_n}} \quad (59)$$

V nadaljnjem bomo potrebovali vrednosti normirane prostornine kot funkcije normiranega polmera (ϑ), kar je grafično prikazano na prilogi 2. Izračunane so z zaporedno uporabo enačb (47) in (57), kar je enostavneje, kot združevanje obeh enačb v en sam izraz.

Tako smo pripravili teoretično osnovo praktičnim izračunom.

Primer 1:

Izračunati želimo dimenzije globoščaka, v katerega bo prerastla udornica Dolec (tik severnega kraka Najdene jame, v odtočnem zaledju Planinskega polja). Razpolagamo z naslednjimi podatki:

$$S = 0,592 \quad V_i = 71\,000 \text{ m}^3 \quad z_i = 533,1 \text{ m}$$

kjer smo z z_i označili nadmorsko višino težišča, izračunano iz neposrednih mer-skih podatkov.

Iz priloge 2/a odčitamo, da pripada izmerjeni vrednosti $S = 0,592$ normirani polmer $\vartheta_s = 1,284$ in normirana prostornina $V_n = 6,576$. Velikostni modul dobimo iz enačbe: (59):

$$r_o = \sqrt[3]{\frac{V_m}{V_n}} = \sqrt[3]{\frac{71\,000 \text{ m}^3}{6,576}} = 22,1 \text{ m}$$

Mimogrede smo tako ugotovili, da je znašal modelni polmer udornega brezna na prehodu v udornico 44,2 m. Iz enačbe (42) vemo, da znaša vrednost normiranega polmera, ko stene izginejo, $\vartheta_m = 1,953$. Modelni polmer globoščaka, v katerega bo prerasel Dolec, ko stene izginejo, znaša tedaj:

$$r_m = \vartheta_m r_o = 1,953 \times 22,1 \text{ m} = 43 \text{ m}$$

Ker znaša normirani polmer v sedanjem trenutku, kot smo ugotovili malo prej, ϑ_s , dobimo modelno vrednost polmera za trenutek opazovanja:

$$r_s = \vartheta_s r_o = 1,284 \times 22,1 \text{ m} = 28 \text{ m}$$

To sta slabi dve tretjini končnega polmera, kar pomeni, da se bo polmer Dolca dotlej približno poldrugikrat povečal.

Zanima nas še, kako globok bo globoščak, ko bo ostal brez sten. Če ne upoštevamo prepereline ki se bo dotlej nedvomno nabrala na meliških, velja:

$$g_m = r_m \operatorname{tg} \alpha = 42 \text{ m} \times \operatorname{tg} 37^\circ 30' = 33 \text{ m}$$

če smo z g_m označili končno globino. Nastali globoščak se bo, če ne že po obliki, vsaj pod imenzijah bistveno loči od korozijskih vrtač v okolici.

Primer 2:

Izračunati želimo približno prostornino jamske dvorane, iz katere je nastal Dolec, ob upoštevanju podatkov s prejšnjega primera.

Samega procesa preraščanja podzemске dvorane v udornico dejansko še ne poznamo, zato bo tudi izračun prostornine približen. Zamišljamo si, da je najprej nastalo podorno brezno z dnom na višini jamske etaže, potem pa to brezno prerastlo v udornico, kot jo opazujemo. Ker pomeni vsako premeščanje materiala zaradi razrahljivosti tudi izgubo prostornine, pomeni, da bi bila ob vsakem bolj zapletenem procesu tudi prvotna prostornina večja. To moramo upoštevati ob vrednotenju končnega rezultata.

Za kakršnokoli preračunavanje prostornin potrebujemo najprej modelno višino zemeljskega površja (z_m). To dobimo ob upoštevanju enačbe (54) oz. priloge 2/a po naslednjem preudarku:

$$\begin{aligned} z_m &= z_t + \tau r_o = \\ &= 533,1 \text{ m} + 0,657 \times 22,1 \text{ m} = 533,1 \text{ m} + 14,5 \text{ m} = 547,6 \text{ m} \end{aligned}$$

pri čemer smo vrednost τ določili s pomočjo normiranega polmera (ϑ), ki smo ga izračunali že v prvem primeru.

Sedaj lahko izračunamo modelno globino udornega brezna, iz katerega je nastala udornica, saj poznamo nadmorsko višino jamskega dna tik podora. Ta znaša po R. Gospodariču in F. Šušteršiču (1980) $z_j = 396,7 \text{ m}$. Modelna globina (g_b) je tedaj:

$$g_b = z_m - z_j = 547,6 \text{ m} - 396,7 \text{ m} = 150,9 \text{ m}$$

Zanima nas še, kakšna je normirana globina (γ_b), oz. kakšni odnosi vežejo modelno globino z normiranim pomerom in dalje z ostalimi količinami, ki jih potrebujemo. Iz slike 2, 4 sledi:

$$\begin{aligned} g_b &= h + r \operatorname{tg} \alpha = (n_o - \mu) r_o + \vartheta r_o \operatorname{tg} \alpha = \\ &= r_o (n_o - \mu + \vartheta \operatorname{tg} \alpha) = r_o \gamma_b \end{aligned} \quad (60)$$

Odtod je:

$$\gamma_b = n_o - \mu + \vartheta \operatorname{tg} \alpha \quad (61)$$

Iz zgornje enačbe lahko izračunamo ob upoštevanju enačbe (40), da je znašala hipotetična normirana globina udornega brezna $\gamma_b = 6,828$, medtem ko velja za Dolca normirana globina $\gamma_a = 1,928$.

Sedaj razpolagamo z vsemi podatki, da sestavimo enačbe (61), (57) in (40) v enoten obrazec, ki povezuje normirano globino z normirano prostornino. Tako nastala enačba je žal implicitna funkcija normirane prostornine in normirane globine in jo moramo reševati numerično. Za praktično uporabo je funkcija $V_n(\gamma)$ že izračunana in grafično prikazana na prilogi 2/b. S slike odčitamo, da odgovarja normirani globini $\gamma_b = 6,828$ normirana prostornina $V_n = 8,87$. To pomnožimo z velikostnim modulom Dolca in dobimo iskano prostornino prvotnega udornega brezna:

$$V_m = r_n r_o^3 = 8,87 \times 22,1^3 \text{m}^3 = 95\,742 \text{m}^3$$

To pa je že več, kot znaša prostornina največje znane dvorane v sosednji Najdeni jami, Putikove dvorane, ki je (F. Šušteršič, 1973, 74) le nekoliko večja od sedanje prostornine Dolca. Zavedati pa se moramo tudi, da smo izračunali šele spodnjo mejo prostornine prvotne jamske dvorane, ki bi bila lahko tudi še precej večja. Obstaja pa seveda tudi še druga možnost, namreč, da uporabljeni model ni pravilen in da je ponornica odstranjevala material tudi še potem, ko je nastalo udorno brezno.

S pomočjo enačbe plaščnice oz. grafov na prilogi 2 lahko izvršimo tudi še druga podobna preračunavanja merskih parametrov udornic, če le razpolagamo z zadovoljivimi terenskimi podatki.

SKLEP

Matematično je formuliran najpreprostejši model preoblikovanja udornic, ob izhodiščnih predpostavkah, da je global geometrijsko pravilna, da se stene le krušijo in ne plazijo ter da okrušeni material ne izginja v žrelo.

Tak model omogoča, da v obsegu izhodiščnih predpostavk iz sedanje oblike izračunamo tudi vse prejšnje oziroma bodoče. Po drugi strani pa je ta model podlaga za izpeljavo zapletenejših, a zato prirodnemu dogajanju bližjih modelov.

Podana je pot, kako terensko izmerjene podatke prirediti matematičnemu modelu in ga tako uporabiti v raziskovalni ali tehniški praksi.

Izpeljani matematični model je popolnoma določen, če poznamo pet parametrov: prostornino globeli, koordinate težišča globeli, delež sten udornice, stabilnostni kot melišč in koeficient razrahljivosti melišč.

Ključna enačba v modelu je enačba plaščnice (40), ki opisuje oblikovnost meje med melišči in nedotaknjeno matično kamnino.

Izračunani so diagrami, ki omogočajo hitro preračunavanje praktično zanimivih količin brez poglobljanja v matematične izpeljave. Podani so tudi primeri neakterih takšnih izračunov.

Matematični model je popolnoma splošen. Zato ga je mogoče uporabiti pri proučevanju kakršnihkoli centričnih globeli, le da veljajo izhodiščne predpostavke. Tako je podana pot za eksaktnije primerjanje raznorodnih, a geometrijsko bližnjih kraških globeli.

LITERATURA

- Agterberg, F.P., 1974: Geomathematics, Mathematical background and geoscience applications. Elsevier, 1—596, Amsterdam, London, New York.
- Amrosi, C. d' 1961: Sull'origine delle doline carsiche nel quadro genetico del carsismo in generale. Le grotte d'Italia, Ser. 3^a, Vol. 3, 5—24.
- Bronštejn, J.N., Semendžajev, K.A., 1963: Matematični priročnik. Založba Življenje in tehnika, 1—699, Ljubljana.
- Carson, M.A., 1977: Angles of repose, angles of shearing resistance and angle of talus slopes. Earth surface processes, 2, 363—380.
- Chorley, R.J., 1972: Spatial analysis in geomorphology. Methuen & Co Ltd., 1—394, London.
- Cramer, H.E., 1944: Die Systematik der Karstdolinen. Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie, und Paläontologie, Beilage Band, Abt. B, 85, 293—382.
- Davis, J.C., 1973: Statistics and data analysis in geology. Wiley & Sons, 1—550, London, New York, Sydney, Toronto.
- Dimitrijevič, M.D., Petrovič, R.S., 1965: Upotreba projekcije lopte u geologiji. Geološki zavod Ljubljana, 1—144, Ljubljana.
- Evans, I.E., 1972: General geomorphology, derivations of altitude and descriptive statistic. V: R. J. Chorley, 1972 (ur.): Spatial analysis in geomorphology, Methuen & Co Ltd., 17—90, London.
- Gams, I., et al., 1973: Slovenska kraška terminologija. Zveza geografskih institucij Jugoslavije, 1—77, Ljubljana.
- Habič, P., 1963: Udorne vrtače koliševke in podzemni tokovi. Treći jugoslavenski speleološki kongres, 125—129, Sarajevo.
- Jakopin, P., 1981: On measuring caves by volume. Proc. Eight int. Congr. of spel., 1, 270—271, Americus.
- Jennigs, J.N., 1975: Doline morphometry as a morphogenetic tool: New Zealand example. New Zealand geographer, 31 (1), 6—28.
- Kemmerly, Ph.R., Towe, S.K., 1978: Karst depressions in time context. Earth surface processes, 3, 355—361.
- Kemmerly, Ph.R., 1980: A time distribution study of doline collapse: framework for prediction. Environmental geology, 3, 123—130.
- Lavalle, P., 1967: Some aspects for linear karst depression development in South-central Kentucky. Annals of the Association of American geographers, 57, 49—71.
- Lavalle, P., 1968: Karst depression morphology in Southcentral Kentucky, Geografiska Annaler, 50 A, 94—108.
- McConnell, H., Horn, J.M., 1972: Probabilities of surface karst. V: R. J. Chorley, 1972 (ur.): Spatial analysis in geomorphology, Methuen & Co Ltd., 111—133, London.
- Michler, I., 1954: Vrtache in doline. Proteus 16, 204—209.
- Mandelbrot, B.B., 1977: Fractals: form, chance, and dimension. Freeman & Co, 1—361, San Francisco.
- Pejović, T., 1949: Diferencijalne jednačine, 1. Naučna knjiga, 1—152, Beograd.
- Rašković, D., 1950: Mehanika, 1, Statika. Naučna knjiga, 1—425, Beograd.
- Scheidegger, A., 1961: Theoretical geomorphology. Springer, 1—333, Berlin, Göttingen, Heidelberg.
- Sweeting, M.M., 1972: Karst landforms. Macmillan, 1—362, London.
- Sušteršič, F., 1968: Nekaj o nastanku kraških udornih dolin. Naše jame, 9, 58—65.
- Sušteršič, F., 1973: K problematiki udornic in sorodnih oblik visoke Notranjske. Geografski vestnik, 45, 71—86.

- Šušteršič, F., 1974: Nekateri metrični problemi udornic. Geografski vestnik, 46, 27—46.
- Šušteršič, F., 1980: Dimenzioniranje kraških votlin. Naše jame, 21 (1979), 61—73.
- Šušteršič, F., 1982: Nekaj misli o oblikovanosti kraškega površja. Geografski vestnik, 54, 19—28.
- Vidav, I., 1975: Višja matematika II. Državna založba Slovenije, 1—576, Ljubljana.
- Vidav, I., 1976/a: Višja matematika I. Državna založba Slovenije, 1—477, Ljubljana.
- Vidav, I., 1976/b: Višja matematika III. Državna založba Slovenije, 1—557, Ljubljana.

A SIMPLE MODEL OF THE COLLAPSE DOLINES TRANSFORMATION

Summary

The paper is in several ways expansion of my previous work about the same topic (F. Sušteršič, 1968, 1973, 1974), though it is not its direct continuation. In the present paper I try to develop the doline-envelop equation, where the surface of the undamaged rock under the scree is denominated envelop. As it is shown in my previous work, cited above, the envelop is the only record of the doline history. On the other hand the share of the scree slopes is the doline age estimator.

The term collapse doline is used here in the sense, prescribed by I. Gams et al. (1973, 29), so that it depicts central depressions, formed by collapsing bedrock only. It seems to be the same as M. M. Sweeting's (1972, 64–65) explanation of Cvijić's definition (cit. o. c.). According to my opinion the English expression »shake hole« fits better to the object than the Anglosaxonian »collapse doline«, especially the latter being used in a very different meaning as well (see Ph. Kemmerly, 1980). Of course some statements established can be generalized to all the central depressions and so the used term becomes more plausible.

The paper is divided in four parts. The first one deals with the informational representation of real collapse dolines, introducing some parametres, needed for the further discussion. In the second part the notions introduced use to express a more strict definition of the studied object. The third part contains the expansion of the equations, depicting the morphology of the collapse dolines, while the last one is intended to the practical use of the equations, developed before. The considerations are based on the simplest models, so that the present study is more a guideline, rather than a collection of practical instructions to a collapse dolines researcher. The terminology used is summarized in Fig. 1.

The parametres used can be broadly divided into three groups. The ones that can be defined and measured in nature are named the measured parametres. The parametres that can be reasonably defined on the model only, are called the model parametres. However, the later may be normalized to simplify the mathematical expressions. In such occasion they are named normalized or nondimensional parametres.

The measured parametres to describe the actual dolines can be chosen in different ways. To obtain the best information possible, I tried to satisfy the criteria of easy availability and informational stability. So I use the volume of the doline space as its dimension estimator, the share of walls in the doline sides as its age estimator and the grid coordinates of its space gravity center as its space position estimator. Two additional parametres, scree slopes stability angle and the scree loosening coefficient control the doline geometry. For the practical calculations, developed in the last part only these five parametres must be known.

SPATIAL PRESENTATION OF COLLAPSE DOLINES

In my previous work I have shown that the orthogonal projection presentation of the collapse dolines induces a lot of bias to the information about the spatial performance of the dolines. So I have proposed to project them firstly to a hemisphere circumscribed and then to represent the projection in the terms of Lambert's equivalent projection. This is needed especially for the reason that the proportions between the rocky walls and talus had been tacitely accepted as a measure of the dolines age. Owing to their fractal properties (see B. B. Mandelbrot, 1977), the surfaces of the mentioned media are measurable in the projection only. The way of projecting exposed is direct, but encompasses some unnecessary bias, the dolines being often elongated. So one needs first to transform their original shape to the highest degree of isometry possible, and later on to perform the projecting proposed.

To achieve this goal, one can use the properties of the variance-covariance matrix (C) eigenvectors (J. C. Davis, 1973, F. P. Agterberg, 1974). The groundplane of the doline is superimposed by an uniform, equispaced point system (Fig. 2, 1/a), any point being characterized by its coordinate pair, for instance in national grids.

Compute the averages (\bar{x} , \bar{y}), the variances (S_{xx} , S_{yy}) and the covariance (S_{xy}):

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (1), (2)$$

$$S_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad S_{yy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad (3), (4)$$

$$S_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (5)$$

Construct the variance-covariance matrix:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

The eigenvalues λ_1 and λ_2 can be obtained from the equation:

$$[\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}] = \mathbf{0} \quad (7)$$

The eigenvectors (\mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2) are given by:

$$[\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}] \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (8)$$

The absolute values of the both eigenvectors are the major and the minor axis of the ellipse, fitting the best to the array of points, encompassed by the doline perimeter (in plane). The eigenvalues are the directional coefficients of the both axis, respectively. Set a new coordinate system, its origin defined by the mean values of the coordinates, and the abscissa being directed parallelly to the major axis of the ellipse! The angle between the old and the new abscissa is then:

$$\varphi = \arctg \lambda_1 \quad (9)$$

and the coordinate transformation operator is:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \quad (10)$$

x' and y' being the transformed coordinate values. Let L_1 and L_2 be the absolute values of the eigenvectors, respectively. The proportions $L_1 : L_2 = h$ is so the elongation ratio of the major axis, compared to the minor one. To obtain the plane of the doline as isometric as possible, multiply the ordinate values by h :

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Let z be the absolute elevation of a point on the doline surfaces and z_m the greatest value of the whole. Then:

$$z'' = z - z_m \quad (12)$$

To draw the doline in the Lambert's projection, one needs the directional angle (α) and the inclination angle (ω) of the radiusvectors to any single point:

$$\alpha = \arctg \frac{y''}{x''} \text{ and} \quad (13)$$

$$\omega = \arctg \frac{z''}{\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2}} \quad (14)$$

To compute the areas of the projected surfaces, they must be divided into spherical triangles. Setting the radius (R) of the projective hemisphere equal to one, the area of any triangle becomes numerically equal to its spherical excess:

$$\vartheta = (A + B + C) - \pi \quad (15)$$

A, B, C , being the angles of the spherical triangles, expressed in radians. They can not be obtained directly, but it can be done to the angles, a, b , and c (sides of the spherical triangle) (Fig. 2, 1/c). Normalize the radiusvectors to the points considered, so that:

$$\mathbf{P}_i = \frac{1}{\sqrt{(x_i'')^2 + (y_i'')^2 + (z_i'')^2}} \cdot \mathbf{T}_i \quad (16)$$

the \mathbf{T}_i being the radiusvector to equally signed point. Then:

$$\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_3 = \cos a \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_1 = \cos b \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = \cos c \quad (19)$$

The angles wanted are defined by the spherical cosine rule:

$$A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad (20)$$

$$B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} \text{ and} \quad (21)$$

$$C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad (22)$$

In the further lines we will deal mostly with a geometrically regular model, i. e. circular cone plus cylinder. In these circumstances the projection to the hemisphere would not be needed, but we use it for the consistency with the real dolines measurements, anyway. To facilitate the further discussion, some parametres, defined on the model, must be introduced. The share of walls (S value) is:

$$S = \frac{P_s}{P_u} \quad (23)$$

where P_s is the area of walls in projection, and P_u the total projection area of the doline, encompassed by the perimeter (= lip, acc. to J. N. Jennings, 1975). If the doline lies in a perfectly flat region, P_u is, of course, equal to the hemisphere area. Let S be the intermediate measure of the doline age, neglecting the asymmetry of the real dolines.

The S value can be computed to any collapse doline. The later can be approximated by a geometrically regular body, which may be considered as an equivalent

model of the doline. Equalizing the S values and the volumes of the real doline and model, respectively, one can always calculate the dimensions of the equivalent model (see part four). For this purpose some other auxiliary parametres must be defined:

$$\vartheta = \frac{r}{r_o} \quad (24)$$

where ϑ is normalized radius, r_o is the (equivalent) radius, the doline being in transient stage between collapse pothole and collapse doline (see the Table below), and r is the (equivalent) radius of the doline when observed. Let h be arbitrary height of the walls (the term equivalent is omitted further on), while h_o is the height, corresponding to r_o , and the r the radius, corresponding to r . So:

$$n_o = \frac{h_o}{r_o} \quad \text{and} \quad n = \frac{h}{r} \quad (25), (26)$$

S value is a parameter equally useful for natural dolines and for models treatment, while n can be reasonably defined for simple models only. Their mutual relations are:

$$S = \frac{P_s}{P_u} = \frac{2\pi R h}{2\pi R^2} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (27)$$

or

$$n = \frac{S}{1 - S^2} \quad (28)$$

derived from Fig. 2, 3/a. The value M is defined as the share of talus:

$$M = 1 - S = 1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (29)$$

DEFINITION OF A COLLAPSE DOLINE

The most widespread definition of collapse dolines is based on H. E. Cramer's (1941) work, if having omitted the conceptual differences, recently induced by the American researchers. So, a collapse doline should be a direct result of cave roof collapse, appearing on the karst surface. An additive condition is very usual, viz. »the diameter exceeds the depth« (I. Gams et al., 1973, F. Šušteršič, 1979). This being forgotten, a formal delimitation between dolines and potholes is impossible.

This notion includes some hidden illogicalities (which are discussed in Slovene text, and) which can be avoided, when having accepted the S value to be the crucial parameter. It can be shown that S value for an equisided cylinder (depth equals diameter) is $S = 0,90$. On the other hand, the collapse dolines, having the S value lower than $0,05$ can not always be distinguished from the solution ones. So, the interval $0,90 > S \geq 0,05$ can be received as the definition interval. Using Eq. (28) one can readily obtain the equivalent n values as well. This is shown on the table 1:

Table 1

Model:	Real depression:	Origin collapse:
$n \geq 2,065$	$S \geq 0,90$	collapse pothole
$2,065 > n \geq 0,050$	$0,90 > S \geq 0,05$	collapse doline
$0,050 > n \geq 0$	$0,05 > S \geq 0,00$	doline sensu lato

The stress upon the superficial properties is apparent. It corresponds to our intentions to determine the underground conditions on the basis of the superficial observations. Nevertheless, one must always be aware that not all collapse phenomena in the karst underground can appear on the surface (F. Sušteršič, 1974, 30, Fig. 1/b).

THE ENVELOP EQUATION

The walls of the collapse dolines are not in stable equilibrium and due to the weathering they decay to the talus in the middle. If the screens are not removed from the doline by means of the underground erosion, the talus is in fact the transpose of the wall material only. Consider a perpendicular cylinder of height h and radius r . In the middle is the talus cone (turned up side down), inclined for the stability angle. The total depth is then: $g = h + r \operatorname{tg} \alpha$, the surrounding being flat.

In the case that the fallen off material disappeared simultaneously to the cave below, the envelop of the doline (see Fig. 1) would tend to become conical, inclined for the angle α . If not, the thickness of the talus increases paralelly to the slope regression and so the basis of the walls is protected. The inclination of the envelop increases for the rate of protected wall basis. As the material in the talus is more loose, than in solid rock, its primary volume must be multiplied by the scree loosening coefficient (k), which brings about the increasing of the envelop inclination as well. Of course:

$$f'(x) = \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{dh}{dx} \quad (30)$$

and considering Fig. 2, 5/a:

$$k 2\pi (r_0 + x) (h_0 - z) dx = \pi (r_0 + x)^2 dh \quad (33)$$

After rearrangement one obtains:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{2k}{r_0 + x} (h_0 - z) \quad (34)$$

Inserting this to Eq. (30), it yields after rearrangement:

$$\frac{dz}{dx} + z \frac{2k}{r_0 + x} - \left(\operatorname{tg} \alpha + h_0 \frac{2k}{r_0 + x} \right) = 0. \quad (35)$$

This is linear differential equation which general solution is:

$$z = \frac{1}{(r_0 + x)^{2k}} \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k + 1} (r_0 + x)^{2k+1} + h_0 (r_0 + x)^{2k} + C \right] \quad (36)$$

Additive constant can be calculated from the boundary condition $z = 0, x = 0$. So:

$$C = - \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k + 1} r_0^{2k+1} + h_0 r_0^{2k} \right] \quad (37)$$

Inserting this to Eq. (36) it follows:

$$z = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k + 1} \left[(r_0 + x) - \frac{r_0^{2k+1}}{(r_0 + x)^{2k}} \right] + h_0 \left[1 - \frac{r_0^{2k}}{(r_0 + x)^{2k}} \right] \quad (38)$$

The mutual relations among r_0, h_0, x , and z appear from their functional interdependency, but they rely upon the measuring units as well. Define:

$$\mu = \frac{z}{r_0} \quad (39)$$

As $r_o + x = r$, Eq. (38) can be written in the nondimensional form:

$$\mu = \frac{tg \alpha}{2k + 1} \left[\vartheta - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right] + n_o \left[1 - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right] \quad (40)$$

The shape of the curve obtained is shown on Annex 1. The extreme perimeter of the collapse doline as defined by equality $\mu = n_o$, as the walls disappear completely. Set n_o to the Eq. (40) instead of μ and solve to ϑ :

$$\vartheta_m = \left[n_o \frac{2k + 1}{tg \alpha} + 1 \right]^{\frac{1}{2k+1}} \quad (42)$$

where ϑ_m is the maximum radius. Setting $k = 1,25$ and $\alpha = 37^\circ 30'$ (F. Šušteršič, 1974) it becomes:

$$\vartheta_m = 1,953$$

Inserting h_o instead of z to Eq. (35), one obtains the inclination of the envelop, when $\vartheta = \vartheta_m$. Naturally:

$$\frac{dz}{dx} = tg \alpha \quad \text{or} \quad (43)$$

$$\frac{d\mu(\vartheta_m)}{d\vartheta} = tg \alpha \quad (44)$$

The normalized radius is a model parameter and it can not be used directly when researched the natural phenomena. A bridge between model and measured parametres can be done by use of the value S , as it can be defined in both occasions. Having combined Eqs. (26), (28), and (45) the relation can be found:

$$\frac{tg \alpha}{2k + 1} \left[\vartheta - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right] + n_o \left[1 - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right] = n_o - \frac{S \vartheta}{\sqrt{1 - S^2}} \quad (46)$$

Supposing the model and measured S values to be equal, one can compute the normalized radius for any measured doline and perform further calculations, based on the formulas developed before.

$$\vartheta(S) = \left[\frac{n_o(2k+1) + tg \alpha}{\frac{S}{\sqrt{1-S^2}}(2k+1) + tg \alpha} \right]^{\frac{1}{2k+1}}$$

To determine the spatial position of a collapse doline, the national grid coordinates of the doline space gravity center can be used. In the case of natural dolines, the gravity center coordinates are obtained by different ways of numerical integration. For the model the vertical distance between the surface and the gravity center can be expressed (see the expansion in Slovene text) in normalized form:

$$\tau = \frac{1}{4} \frac{\vartheta^2 tg^2 \alpha + 4(n_o - \mu) tg \alpha + 6(n_o - \mu)^2}{\vartheta tg \alpha + 3(n_o - \mu)} \quad (54)$$

The graph of the function is shown on the Annex 2/b.

PRACTICAL USE OF THE ENVELOP EQUATION

The previously developed equations can be useful tool when computing quantities, met in everyday speleological practice. But the first step is to find the relation between the measured and model dimensions. As defined before, the module

is the r_o that multiplies the nondimensional quantities. It can be obtained when equalizing the measured (V_i) and the model (V_m) doline volume. The former is obtained from the measurement data, while the later can be expressed:

$$V_m = \pi r^2 h + \pi r^2 \frac{1}{3} r \operatorname{tg} \alpha \quad (55)$$

having used the Fig. 2, 4. After rearrangement and having used Eq. (40) one obtains:

$$\begin{aligned} V_m &= r_o^3 \pi \left\{ \vartheta^2 \left\{ n_o - \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k+1} \left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right) + n_o \left(1 - \frac{1}{\vartheta^{2k}} \right) \right] \right\} + \frac{1}{3} \vartheta^3 \operatorname{tg} \alpha \right\} = \\ &= r_o^3 \left\{ \pi \left[\vartheta^3 \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2k+1} \right) + \vartheta^{2-2k} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k+1} + n_o \right) \right] \right\} \quad (57) \end{aligned}$$

Define the expression in the braces to be normalized volume (V_n).

Then:

$$V_m = V_n r_o^3 \quad (58)$$

And so:

$$r_o = \sqrt[3]{\frac{V_m}{V_n}} = \sqrt[3]{\frac{V_i}{V_n}} \quad (59)$$

The values of normalized volume are plotted against the normalized radius on Annex 2/a.

Example 1:

Compute the final dimensions of the collapse doline Dolec (near Planinsko polje). The field data are: $S = 0,592$ $V_i = 71\,000 \text{ m}^3$ $z_t = 553,1 \text{ m}$ where z_t is the absolute level of the doline space gravity center.

On the Annex 2/a one can read that the values $\vartheta_s = 1,284$ and $V_n = 6,576$ belong to the value $S = 0,592$. Compute the size module by use of the Eq. (59)!

$$r_o = \sqrt[3]{\frac{V_m}{V_n}} = \sqrt[3]{\frac{71\,000 \text{ m}^3}{6,576}} = 22,1 \text{ m}$$

The radius of the doline will achieve its maximum extent when the walls disappear (Eq. (42)):

$$r_m = \vartheta_m r_o = 1,953 \times 22,1 \text{ m} = 43 \text{ m}$$

The normalized radius at the observation time is:

$$r_s = \vartheta_s r_o = 1,284 \times 22,1 = 28 \text{ m}$$

Mark the final depth of the doline g_m ! So:

$$g_m = r_m \operatorname{tg} \alpha = 43 \text{ m} \times \operatorname{tg} 37^\circ 30' = 33 \text{ m}$$

At its end stage the doline will differ a lot from the neighbouring solution by its dimensions, though their geometry will be similar.

Example 2:

Compute the minimum volume of the cave room, precedent to the doline, described by the previous data. The level of the cave bottom is estimated $z_j = 369,7 \text{ m}$.

The model earth surface is obtained when considering Eq. (54) and Annex 2/a:

$$\begin{aligned} z_m &= z_t + \tau r_o = \\ &= 533,1 \text{ m} + 0,657 \times 22,1 \text{ m} = 533,1 \text{ m} + 14,5 \text{ m} = 547,6 \text{ m} \end{aligned}$$

Suppose that the actual collapse doline grew from a collapse pothole that resulted from the cave roof falling down. Its volume can be considered to be the minimum possible volume of the past cave room. The model depth is:

$$g_b = z_m - z_j = 547,6 \text{ m} - 396,7 \text{ m} = 150,9 \text{ m}$$

According to the Fig. 4a the corresponding normalized depth is:

$$\begin{aligned} g_b &= h + r \operatorname{tg} \alpha = (n_o - \mu) r_o + \delta r_o \operatorname{tg} \alpha = \\ &= r_o (n_o - \mu + \delta \operatorname{tg} \alpha) = r_o \gamma_b \end{aligned} \quad (60)$$

And so:

$$\gamma_b = n_o - \mu + \delta \operatorname{tg} \alpha \quad (61)$$

Considering Eq. (40) one can compute the hypothetical normalized depth of the collapse pothole to be $\gamma_b = 6,828$ m.

One would like to compose Eqs. (61), (57), and (40) to a general formula, expressing the normalized depth by the normalized volume. So far, the relations are implicate and the numerical solution is the only possible. The resulting function graph is shown on Annex 2 b. One can read right a way that the normalized volume, dependent on given normalized depth value ($\gamma_b = 6,828$) is $V_n = 8,87$. Multiply by the size module:

$$V_m = V_n r_o^3 = 8,87 \times 22,1^3 \text{ m}^3 = 95\,742 \text{ m}^3$$

The past cave room, preceding the actual doline had so encompassed about 96 000 m³.

By the use of the equations developed above and the graphs in the annexes several similar calculations, needed in everyday speleological practice can be done as well. Anyway, one must be aware, that the model may differ quite a lot from the reality in some cases and that the result must always be regarded as an approximation.

CONCLUSIONS

The simplest model of the collapse dolines transformation is formulated mathematically, based on the fundamental suppositions: the doline is geometrically regular, the wall material falls off only and does not slide down, and the scree material does not sink into the gap.

Such a model permits us to compute all the following or the past forms from the recent ones, provided that the basic suppositions hold true approximatively. On the other hand, the model is a basis to more sophisticated models deduction.

A way to adjust the field measured data to the model calculations is presented. So the model may be used in everyday research or engineering practice.

The model is determined by five parametres: the doline space gravity centre grid coordinates, the doline volume, the share of walls among the doline slopes, the talus stability angle, and the scree loosening coefficient.

The key equation is Eq. 40 that describes the shape of the border plane between the talus and the intact solid rock.

Diagrams to provide easy calculation of everyday used quantities are computed, so that no deep insight in the mathematical development of the model is needed. Two examples of such calculations are expanded, based on a real doline measurements.

The mathematical model derived is general. So it can be used when studying any type of central depressions, provided that the fundamental suppositions may be received. In such a way one can compare geometrically similar closed depressions of different origin.