

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2022, letnik 69, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 30 EUR, za tujino 35 EUR. Posamezna številka za člane stane 6,00 EUR, stare številke 3,00 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2022 DMFA Slovenije – 2150

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov \TeX oziroma \LaTeX , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

OFIURIDA ALI KAČJEREPNICA

MARKO RAZPET IN NADA RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 14H45, 51M15

Predstavljamo ofiurido, manj znano ravninsko krivuljo, ki jo je prvi obravnaval D. Uhlhorn na začetku 19. stoletja. Ofiurida je množica točk, ki jih dobimo s preprostim geometrijskim postopkom, je pa tudi nožiščna krivulja parabole, inverzna slika hiperbole ter cisoida premice in krožnice. Pokazali bomo, da z ofiurido lahko rešujemo nekatere kubične enačbe.

OPHIURIDE

We introduce the ophiuride, a lesser-known planar curve, first discussed by D. Uhlhorn at the beginning of the 19th century. An ophiuride is a set of points obtained by a simple geometric procedure, but it is also a pedal curve of a parabola, the inverse of a hyperbola, and the cissoid of a line and a circle. We will show that the ophiuride can be used to solve some cubic equations.

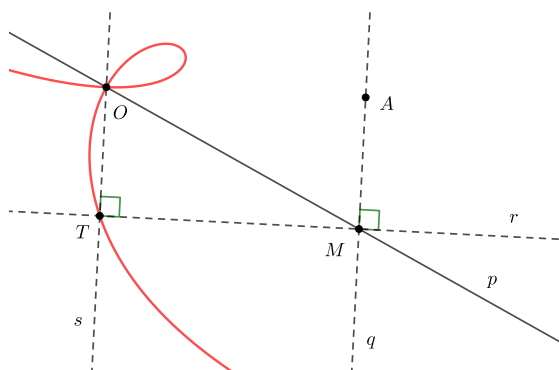
Uvod

Nemški samouk in iznajditelj Diedrich (tudi Diederich) Uhlhorn (1764–1837) je že v delavnici svojega očeta, mizarja, in kasneje v svoji poklicni karieri pokazal velik talent za izdelavo mehanskih in optičnih naprav. Samostojno se je naučil toliko matematike, da je lahko začel študirati krivulje. D. Uhlhorn je opazoval na delujočih strojih gibanje točk, ki opisujejo razne krivulje. Verjetno so bile le-te navdih, da je leta 1809 objavil knjigo [5], v kateri je precej natančno obravnaval več ravninskih krivulj, ki jim je dal tudi imena, jih zapisal v pravokotnih kartezičnih koordinatah in dognal njihove glavne lastnosti, pri čemer je uporabljal tudi odvod. Za nekatere krivulje je izdelal in na koncu knjige objavil načrte orodij, s katerimi bi te krivulje lahko načrtovali.

D. Uhlhorn v svoji knjigi na prvem mestu obravnava ravno ofiurido in njeno uporabo ter opiše orodje za njeno načrtovanje. Posveti ji kar 40 strani. Besedo *ofiurida* izvaja iz grških besed *ófis*, kar pomeni *kača*, v nemščini *Schlange*, in *ourá*, kar pomeni *rep*, v nemščini *Schwanz*. Iz tega je za ofiurido D. Uhlhorn sestavil nemško besedo *Schlangenschwanzlinie*, kar pomeni dobesedno *kačjerepa črta*, lepše in krajše *kačjerepnica*.

D. Uhlhorn uporablja ofiurido tudi za rešitev antičnih problemov podvojitve kocke in tretjinjenje kota. Antični matematiki so sicer uporabljali nekaj krivulj za reševanje teh dveh problemov, ni pa videti, da bi poznali tudi ofiurido. Vse kaže, da je bil D. Uhlhorn prvi, ki se je kar natančno ukvarjal z njo (glej [2]). Načrtovanje z njegovim orodjem pa nas še najbolj spominja na znano Platonovo rešitev problema podvojitve kocke z dvema kotnikoma, o čemer je nekaj napisanega v [3].

Ofiurida je ravninska krivulja, ki jo določajo trije podatki: premica p , izbrana točka O na p in izbrana točka A , ki ni na p . Premica p in točki O ter A so za izbrano ofiurido stalnice.



Slika 1. Konstrukcija točke na ofiuridi.

Oglejmo si, kako najenostavneje konstruiramo posamezne točke T na ofiuridi, ki jo določajo p , O in A . Najprej na p izberemo točko M in konstruiramo premico q skozi A in M . Nato konstruiramo v M pravokotnico r na q , nazadnje pa še pravokotnico s skozi O na r . Premici q in s sta vzporedni.

Premici r in s se sekata v točki T . Ko točka M preteče p , točka T opiše krivuljo, ki jo zaradi njene oblike imenujemo *ofiurida*. Del krivulje ima obliko zanke (slika 1).

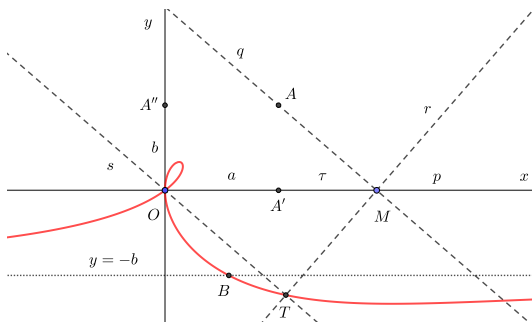
Analična obravnava ofiuride

Tako kot D. Uhlhorn bomo ofiurido obravnavali z metodami analitične geometrije. Dodali pa bomo še marsikaj, kar mu ni bilo znano. Vpeljemo pravokotni kartezični koordinatni sistem Oxy . Vlogo premice p bo igrala os x , vlogo točke O koordinatno izhodišče, točka $A(a, b)$ pa naj bo v prvem

Ofiurida ali kačjerepnica

kvadrantu. Pozitivni števili a in b ofiurido v koordinatnem sistemu Oxy natančno določata.

Pravokotna projekcija točke A na os x je točka $A'(a, 0)$, na ordinatno os pa točka $A''(0, b)$. Točka A je od O oddaljena za $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Slika 2. Ofiurida v koordinatnem sistemu.

Vpeljemo relativno absciso τ točke M glede na A' , tako da je $M(a + \tau, 0)$. Brez težav zapišemo enačbe premic q , r in s :

$$q: y = -\frac{b}{\tau}(x - a - \tau), \quad r: y = \frac{\tau}{b}(x - a - \tau), \quad s: y = -\frac{b}{\tau}x.$$

Točka T na ofiuridi je presek premic r in s in ima koordinati

$$x_T = \frac{(a + \tau)\tau^2}{b^2 + \tau^2}, \quad y_T = -\frac{b(a + \tau)\tau}{b^2 + \tau^2}.$$

Da bi ofiurido čim lepše parametrizirali, vpeljemo z relacijo $\tau = -bt$ številski parameter t in dobimo:

$$x(t) = \frac{(a - bt)t^2}{1 + t^2}, \quad y(t) = \frac{(a - bt)t}{1 + t^2}. \quad (1)$$

To sta parametrični enačbi ofiuride. Takoj opazimo, da $|x(t)| \rightarrow \infty$ in $y(t) \rightarrow -b$, ko $|t| \rightarrow \infty$. To pomeni, da je $y = -b$ vodoravna asimptota ofiuride. Ko parameter t narašča od zelo velikih negativnih vrednosti proti 0, točka T potuje v četrtem kvadrantu, njena abscisa se manjša, ordinata pa doseže nekje najmanjšo vrednost, ki jo bomo kasneje izračunali. Za $t < -b/a$ poteka ofiurida pod svojo asimptoto, za $t = -b/a$ jo preseka v točki $B(b^2/a, -b)$, za $-b/a < t < 0$ pa poteka nad asimptoto in za $t = 0$ doseže koordinatno izhodišče O . V četrtem kvadrantu ima ofiurida tudi prevoj. Za $t = a/b$

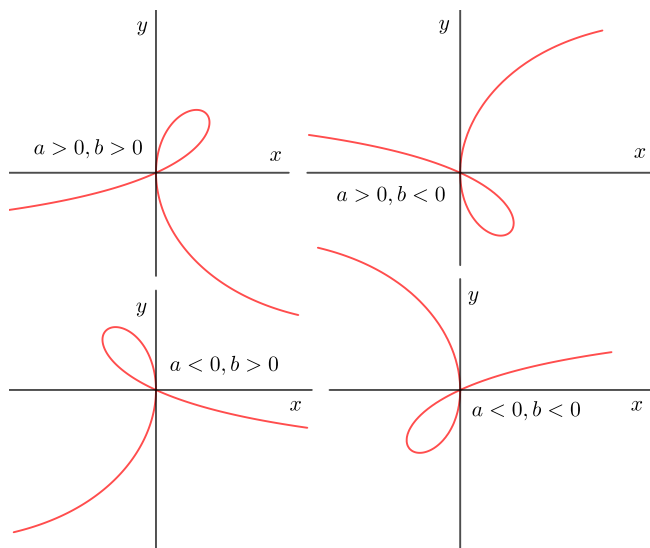
doseže T še enkrat točko O , za $t \in [0, a/b]$ opiše v negativni smeri v prvem kvadrantu zanko, katere velikost je odvisna od razmerja konstant a in b . Ko t narašča od a/b prek vseh meja, potuje T po tretjem kvadrantu in se od zgoraj približuje asimptoti ofiuride.

Iz enačb (1) vidimo, da velja zveza $x(t)/y(t) = t$. Z izločitvijo parametra t najdemo implicitno enačbo ofiuride:

$$y(x^2 + y^2) = x(ay - bx). \quad (2)$$

Ofiurida je algebrska krivulja tretje stopnje in je določena s konstantama a in b . Ker se jo da parametrizirati z racionalnima funkcijama, je racionalna krivulja. D. Uhlhorn je njeno implicitno enačbo našel, ni pa se ukvarjal z njeno parametrizacijo. Enačba (2) je kvadratna za spremenljivko x , ki se jo da izraziti z y . D. Uhlhorn je vztrajal pri tem in našel več lastnosti ofiuride. Videli bomo, da se jo da lepo obravnavati v parametrični obliki.

V enačbi (2) pravzaprav lahko dovolimo tudi negativne konstante a ali b . Iz ofiuride s konstantama $|a|$ in $|b|$ dobimo ofiuride za vse primere s preprostimi transformacijami, in sicer: za $a > 0$ in $b < 0$ z zrcaljenjem čez os x , za $a < 0$ in $b > 0$ z zrcaljenjem čez os y ter za $a < 0$ in $b < 0$ z zrcaljenjem čez koordinatno izhodišče (slika 3). To ustreza izbiri točke A glede na premico p in točko O na njej (slika 1) oziroma postavitvi točke A v ustrezen kvadrant.

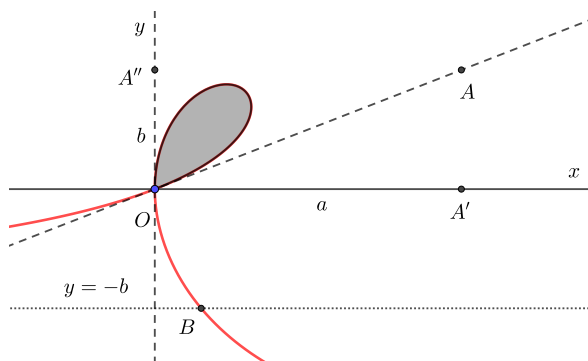


Slika 3. Ofiurida in predznaka konstant a in b .

Kaj pa, če dovolimo, da je v enačbi (2) katera od konstant a in b enaka 0? Za $a = b = 0$ dobimo kar abscisno os, $y = 0$. Za $a = 0$ in $b \neq 0$ pa $x^2(y + b) = -y^3$, kar je enačba Dioklove cisoide, ki ima v točki O ost z navpično tangento in ne zanke ter vodoravno asimptoto $y = -b$. Ugotoviti nista v nasprotju z definicijo ofiuride v Uvodu.

Za $a \neq 0$ in $b = 0$ dobimo iz enačbe (2) enačbo $y(x^2 + y^2 - ax) = 0$, ki predstavlja unijo premice $y = 0$ in krožnice $x^2 + y^2 - ax = 0$ s središčem v točki $S(a/2, 0)$ in polmerom $\varrho = |a|/2$. Tudi ta ugotovitev ni v nasprotju z uvodno definicijo ofiuride. Točka $A \neq O$ v tem primeru leži na premici p (slika 1). Za $M \neq A$ dobimo vse točke T na p . Za $M = A$ pa je treba upoštevati vse premice q skozi A , vse pravokotnice r skozi A na q in vse pravokotne projekcije točke O na r . S tem dobimo točke T , ki ležijo na krožnici s središčem v središču daljice OA in polmerom $\varrho = |OA|/2$.

Zato lahko brez škode za splošnost obravnavamo samo primer $a > 0$ in $b > 0$. Za zelo majhne x in y v (2) prevlada desna stran. To pomeni, da je približek ofiuride tedaj krivulja $x(ay - bx) = 0$, ki pa razpade na premici $x = 0$ in $ay = bx$, ki sta tangenti na ofiurido v njeni dvojni točki O . Prva poteka skozi O in A'' , druga pa skozi O in A (slika 4).



Slika 4. Tangenti na ofiurido v njeni dvojni točki.

Parametrična oblika ofiuride je primerna za izračun ploščine $S(a, b)$ lika, ki ga omejuje njena zanka. Uporabimo formulo

$$S(a, b) = -\frac{1}{2} \int_0^{a/b} (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))dt,$$

v kateri je s piko označen odvod po parametru t . Predznak minus stoji pred integralom zato, ker točka $T(x(t), y(t))$ opiše zanko v negativni smeri, ko t

teče po integracijskem intervalu. Po daljšem računu dobimo:

$$\mathcal{S}(a, b) = \frac{1}{2} \int_0^{a/b} \frac{t^2(a-bt)^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{4}(a^2 - 3b^2) \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \frac{3ab}{4} - ab \ln \frac{c}{b},$$

kjer je $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. V posebnem primeru $a = 0, b \neq 0$ je $\mathcal{S}(0, b) = 0$, kar ni presenetljivo, saj ofiurida, ko $a \rightarrow 0$ pri $b \neq 0$, preide v Dioklovo cisoido, zanka ofiuride pa se stisne v točko.

Ofiurida kot cisoida premice in krožnice

Točko O pravokotno projicirajmo na premico q (slika 5). Dobimo točko P , premico skozi O in P pa označimo z n . Enačba premice n je $by = \tau x$. Preprost račun pokaže, da ima točka P koordinati

$$x_P = \frac{b^2(a + \tau)}{b^2 + \tau^2}, \quad y_P = \frac{b\tau(a + \tau)}{b^2 + \tau^2}.$$

Ni težko videti, da koordinati točke P zadoščata enačbi krožnice

$$x^2 + y^2 = ax + by,$$

ki je očrtana pravokotniku $OA'AA''$. Njeno središče je v točki $S(a/2, b/2)$, polmer pa $c/2$. Ko teče M po premici p , teče P po tej krožnici. Premica n preseka premico $y = b$ v točki $Q(b^2/\tau, b)$. Za vektor \overrightarrow{QP} v standardni bazi dobimo

$$\overrightarrow{QP} = \left(\frac{b^2(a\tau - b^2)}{\tau(b^2 + \tau^2)}, \frac{b(a\tau - b^2)}{b^2 + \tau^2} \right).$$

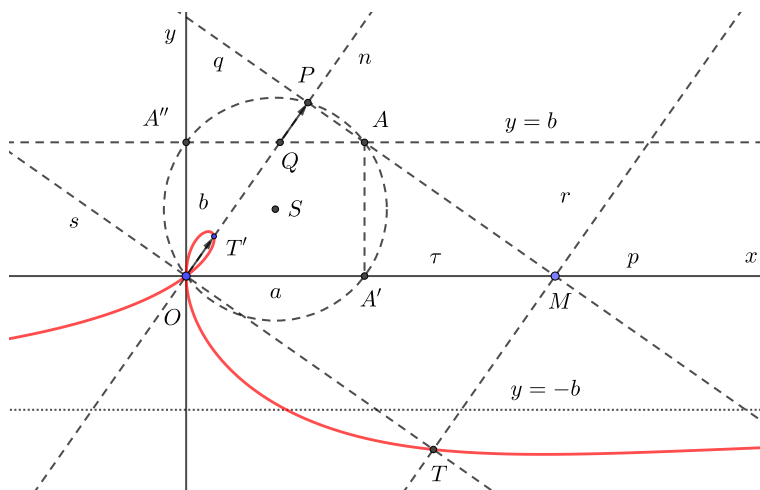
Če vpeljemo nov številski parameter σ z relacijo $\sigma\tau = b$, dobimo

$$\overrightarrow{QP} = \left(\frac{(a - b\sigma)\sigma^2}{1 + \sigma^2}, \frac{(a - b\sigma)\sigma}{1 + \sigma^2} \right).$$

Na premici n določimo točko T' tako, da velja $\overrightarrow{OT'} = \overrightarrow{QP}$. To pa pomeni, da T' teče po ofiuridi, ko M teče po premici p . Ofiurida (2) je torej v smislu definicij v [1, 4] cisoida premice $y = b$ in krožnice $x^2 + y^2 = ax + by$.

Do enakega rezultata pridemo tudi, če ofiurido (2) zapišemo v polarnih koordinatah: $r = a \cos \varphi + b \sin \varphi - b/\sin \varphi$.

Ofiurida ali kačjerepnica



Slika 5. Ofiurida in krožnica.

Ofiurida kot nožiščna krivulja parabole

Ko spreminjamo točko M po premici p , premice r ogrinjajo neko krivuljo. Poiščemo jo po standardnem postopku. Enoparametrična družina premic r je dana z enačbo

$$F(x, y, \tau) = by - \tau(x - a - \tau) = 0.$$

Njihovo ogrinjačo, ovojnico ali envelopo dobimo, če iz sistema enačb

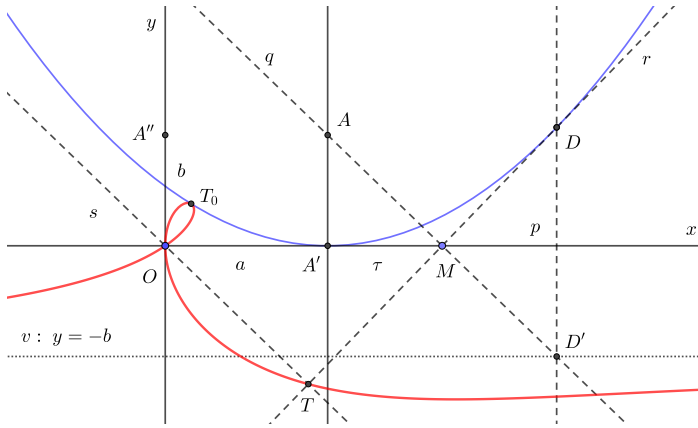
$$F(x, y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \tau}(x, y, \tau) = 0$$

izločimo parameter τ . Rezultat je preprost. Iskana ogrinjača je parabola

$$4by = (x - a)^2. \tag{3}$$

Njeno teme je točka $A'(a, 0)$, gorišče je točka $A(a, b)$, vodnica v pa asimptota ofiuride. Točke T so pravokotne projekcije ali nožišča točke O na tangente te parabole. To pomeni, da je ofiurida nožiščna krivulja parabole glede na točko na njeni temenski tangenti (slika 6).

V kateri točki $T_0(x_0, y_0)$ se ofiurida in parabola dotikata? Da bi odgovorili na to vprašanje, moramo rešiti sistem enačb (2) in (3). Ko izločimo neznanke x in y , dobimo $(x^3 - 3ax^2 + (3a^2 + 8b^2)x - a^3)^2 = 0$. Rešiti je treba kubično enačbo $x^3 - 3ax^2 + (3a^2 + 8b^2)x - a^3 = 0$, ki se po uvedbi nove neznanke



Slika 6. Ofiurida in parabola.

$\xi = x - a$ prevede v enostavnejšo: $\xi^3 + 8b^2\xi + 8ab^2 = 0$. Po Cardanu dobimo realen koren

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\sqrt[3]{4b^2(\delta - 3a\sqrt{3})} - \sqrt[3]{4b^2(\delta + 3a\sqrt{3})} \right),$$

pri čemer je $\delta = \sqrt{27a^2 + 32b^2}$. Iskana točka je torej $T_0(\xi_0 + a, \xi_0^2/(4b))$. Izkaže se, da je ta točka na zanki ofiuride od njene dvojne točke O najbolj oddaljena.

Premica r se parabole dotika v točki $D(a + 2\tau, \tau^2/b)$. Pravokotna projekcija dotikališča D na vodnico v parabole je $D'(a + 2\tau, -b)$ in premica r , tangenta na parabolo v D , je simetrala daljice AD' . To lastnost lahko izkoristimo za konstrukcijo kubičnega korena z metodo prepogibanja papirja, kar bomo naredili na koncu prispevka.

Ofiurida in hiperbola

Kaj dobimo z inverzijo ofiuride (2) na krožnici $x^2 + y^2 = a^2$? Inverzija na taki krožnici je preslikava

$$\iota : (x, y) \mapsto \left(\frac{a^2x}{x^2 + y^2}, \frac{a^2y}{x^2 + y^2} \right).$$

Ofiurida ali kačjerepnica

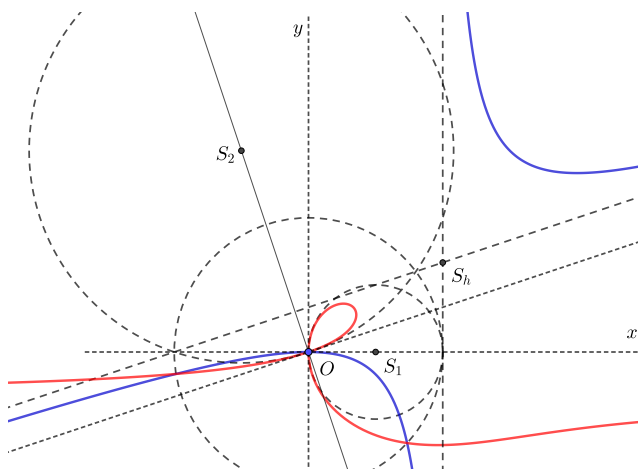
Ko jo uporabimo v enačbi ofiuride in dobljeni izraz poenostavimo, dobimo enačbo $axy - bx^2 = a^2y$, iz katere sledi

$$y = \frac{bx^2}{a(x-a)} = \frac{bx}{a} + b + \frac{ab}{x-a}.$$

Iskana krivulja je stožnica, in sicer hiperbola z asimptotama

$$x = a \text{ in } y = \frac{bx}{a} + b.$$

Presečišče asimptot je središče $S_h(a, 2b)$ hiperbole (slika 7).



Slika 7. Ofiurida in hiperbola.

Poševna asimptota hiperbole je vzporedna tangenti na ofiurido v točki O . Inverzija ι seveda preslika hiperbolo nazaj v ofiurido. Kaj pa asimptoti? Navpična asimptota se preslika v krožnico $x^2 + y^2 = ax$ s središčem v točki $S_1(a/2, 0)$ in polmerom $\rho_1 = a/2$ in se dotika navpične tangente na ofiurido v O , poševna pa v krožnico $b(x^2 + y^2) = a^2y - abx$ s središčem v točki $S_2(a/2, a^2/(2b))$ in polmerom $\rho_2 = ac/(2b)$. Ta krožnica se v O dotika poševne tangente na ofiurido v O . Središče S_2 leži namreč na premici $by = -ax$, ki je pravokotna na poševno tangento na ofiurido v O . Opazimo tudi, da je prvi polmer odvisen le od konstante a .

Obe krožnici, inverzni sliki asimptot hiperbole, sta tudi pritisnjeni krožnici na ofiurido v točki O . Kako to vidimo? V točki, ki jo določa parameter t , je krivinski polmer

$$\rho(t) = \frac{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{3/2}}{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|} = \frac{(a^2 - 4abt + 4b^2t^2 + b^2t^4)^{3/2}}{2|a^2 - 3abt + 3b^2t^2 + abt^3|}. \quad (4)$$

Za $t = 0$ in $t = a/b$ res dobimo

$$\varrho_1 = \rho(0) = \frac{a}{2}, \quad \varrho_2 = \rho(a/b) = \frac{ac}{2b}.$$

To ni nič čudnega in je v soglasju s tisto lastnostjo inverzije na krožnici, ki pravi, da inverzija ohranja kote med krivuljami. Ofiurida s pritisnjenima krožnicama v O vred se z inverzijo preslika v hiperbolo in njeni asimptoti. Asimptoti sta tangenti na hiperbolo v neskončnosti.

Ekstremne točke in prevoj ofiuride

Kje ima ofiurida ekstremne točke? Katere točke na njej imajo lokalne ekstremne ordinate, katere lokalne ekstremne abscise? Odgovor se skriva v odvodih funkcij v (1):

$$\dot{x}(t) = \frac{t(2a - 3bt - bt^3)}{(1 + t^2)^2}, \quad \dot{y}(t) = \frac{a - 2bt - at^2}{(1 + t^2)^2}.$$

Najlaže je poiskati t za ekstremni ordinati, v katerih je $\dot{y}(t) = 0$. Rešitvi kvadratne enačbe $at^2 + 2bt - a = 0$ sta $t_{1,2} = (-b \pm c)/a$, iz katerih dobimo točki

$$Y\left(\frac{(c-b)^2}{2a}, \frac{c-b}{2}\right), \quad Z\left(\frac{(c+b)^2}{2a}, -\frac{c+b}{2}\right).$$

Točka Y ima največjo ordinato na ofiuridi, točka Z pa najmanjšo. V teh dveh točkah je tangenta na ofiurido vodoravna (slika 8).

Teže pa je najti na ofiuridi točko X z lokalno ekstremno absciso. Če postavimo $\dot{x}(t) = 0$, dobimo $t = 0$ za dvojno točko O , v kateri ima abscisa ofiuride najmanjšo vrednost, če upoštevamo samo lok od Z do Y , netrivialno rešitev na zanki pa dobimo, če rešimo kubično enačbo $bt^3 + 3bt - 2a = 0$. Njeno edino realno rešitev t_0 izrazimo po Cardanu:

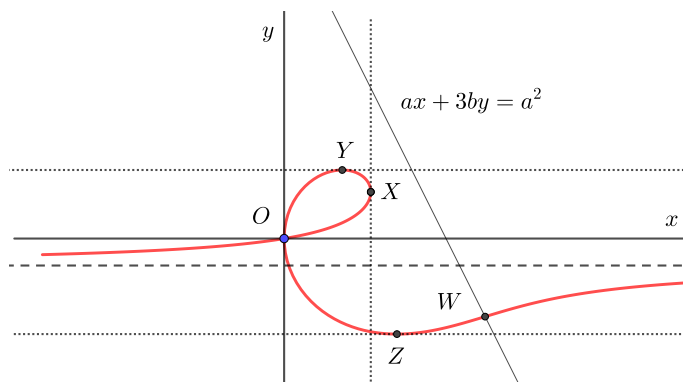
$$t_0 = \sqrt[3]{\frac{a+c}{b}} + \sqrt[3]{\frac{a-c}{b}}.$$

Da bi izračunali $X(x(t_0), y(t_0))$, izkoristimo zvezo $bt_0^3 + 3bt_0 - 2a = bt_0(t_0^2 + 1) - 2(a - bt_0) = 0$, iz česar takoj sledi

$$y(t_0) = \frac{t_0(a - bt_0)}{1 + t_0^2} = \frac{bt_0^2}{2}, \quad x(t_0) = t_0y(t_0) = \frac{bt_0^3}{2} = a - \frac{3bt_0}{2}.$$

Lokalno največjo absciso ima torej ofiurida v točki

$$X \left(a - \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{(a+c)b^2} + \sqrt[3]{(a-c)b^2} \right), \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{(a+c)^2b} + \sqrt[3]{(a-c)^2b} \right) - b \right).$$



Slika 8. Lokalno ekstremne točke in prevoj ofiuride.

V prevoju W ofiuride je njena ukrivljenost, to je obratna vrednost krivinskega polmera $\rho(t)$, enaka 0. To pomeni, da mora v prevoju parameter t zadoščati enačbi $a^2 - 3abt + 3b^2t^2 + abt^3 = 0$. Te enačbe ne bomo reševali, pač pa bomo upoštevali, da v vsaki točki $T(x, y)$ velja $x/y = t$. To uporabimo v zgornji enačbi, ki jo poenostavimo v $abx^3 + 3b^2x^2y - 3abxy^2 + a^2y^3 = 0$, iz (2) pa izrazimo $y^3 = axy - bx^2 - x^2y$. Iz obeh enačb dobimo $x(bx - ay)(ax + 3by - a^2) = 0$. Enačba razpade na tri: $x = 0$, $bx - ay = 0$ in $ax + 3by - a^2 = 0$. Prvi dve nam dasta točko O , kjer ni prevoja. Prevoj ofiuride je potemtakem na premici $ax + 3by = a^2$. Za koordinati prevoja W dobimo kubični enačbi, katerih realni rešitvi se izražata precej zapleteno.

Ofiurida, kubične enačbe in tretjinjenje kota

Z ofiuridami lahko rešujemo tudi kubične enačbe z realnimi koeficienti in posledično tudi tretjinimo kote. Znano je, da lahko vsako kubično enačbo s premikom neznanke pretvorimo v obliko

$$y^3 + py + q = 0. \quad (5)$$

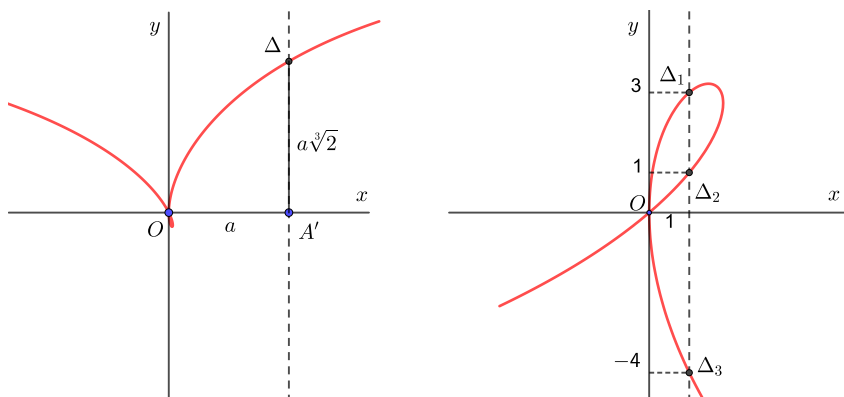
Če preoblikujemo enačbo ofiuride (2) v kubično enačbo glede na y , tudi dobimo tako obliko:

$$y^3 + (x^2 - ax)y + bx^2 = 0. \quad (6)$$

S primerjavo koeficientov v enačbah (5) in (6) dobimo $p = x^2 - ax$, $q = bx^2$. Če sta p in q realna koeficienta, izberemo primeren $x_0 \neq 0$ in določimo konstanti ofiuride:

$$a = \frac{x_0^2 - p}{x_0}, \quad b = \frac{q}{x_0^2}.$$

Načrtamo ustrezno ofiurido, ki ima eno od oblik na sliki 3. Ordinate presečišč s premico $x = x_0$ so realne rešitve enačbe (5).



Slika 9. Rešitev enačb $y^3 = 2a^3$ (levo) in $y^3 - 13y + 12 = 0$ (desno) z ofiurido.

Najprej rešimo enačbo $y^3 - 2a^3 = 0$ za $a > 0$. Njen realni koren je $y_0 = a\sqrt[3]{2}$. Tedaj je $p = 0$, $q = -2a^3$, $a = x_0$ in $b = -2a$. Z ofiurido s konstantama a in $b = -2a$ tako grafično rešimo problem podvojitve kocke. Na sliki 9 levo je $a = |OA'|$ in $a\sqrt[3]{2} = |A'\Delta|$. Tako je, kot kaže, D. Uhlhorn na svojevrsten način rešil problem podvojitve kocke.

Podobno rešujemo enačbo $y^3 - 13y + 12 = 0$. Za $x_0 = 1$ dobimo konstanti ofiuride $a = 14$ in $b = 12$ (slika 9 desno).

Nepraktičnost take metode reševanja kubičnih enačb, česar se je zavedal D. Uhlhorn, je v tem, da je za vsako enačbo treba določiti konstanti a in b ofiuride.

Tretjinjenje kota lahko obravnavamo v okviru kubičnih enačb. Če je namreč $\alpha = 3\beta$, velja enakost $4\cos^3\beta - 3\cos\beta = \cos\alpha$, kar pomeni, da pri znanem kotu α število $y = \cos\beta$ zadošča kubični enačbi

$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}\cos\alpha = 0,$$

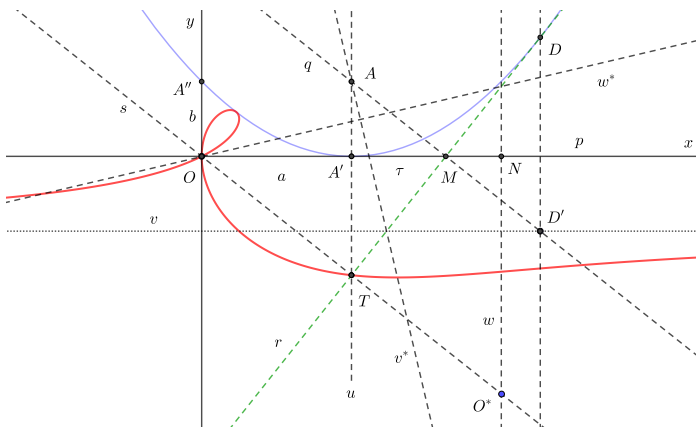
ki je oblike (5) in jo lahko rešujemo z ustrezno ofiurido. Dovolj je, da znamo

to narediti za oster kot α . Tedaj sta $\cos \alpha$ in $\cos \beta$ s kotoma α in β natančno določena, kar pomeni, da pri izbrani enoti lahko za kot α konstruiramo $\cos \alpha$, iz dobljenega $\cos \beta$ pa kot β .

Ofiurida in prepogibanje papirja

Ofiurido (2) preseka premica u , ki ima enačbo $x = a$ in poteka skozi A in A' , v točki $T(a, -\sqrt[3]{a^2b})$ (slika 10). Tedaj je $|A'T| = \sqrt[3]{a^2b}$. Premica r je tangenta na parabolo (ogrinjačo premic skozi M in točke na ofiuridi) v točki D in poteka skozi $M(a + \tau, 0)$ in T , je pa tudi simetrala daljice AD' . Iz podobnih trikotnikov OTA' in TMA' dobimo $\tau = |A'M| = \sqrt[3]{ab^2}$.

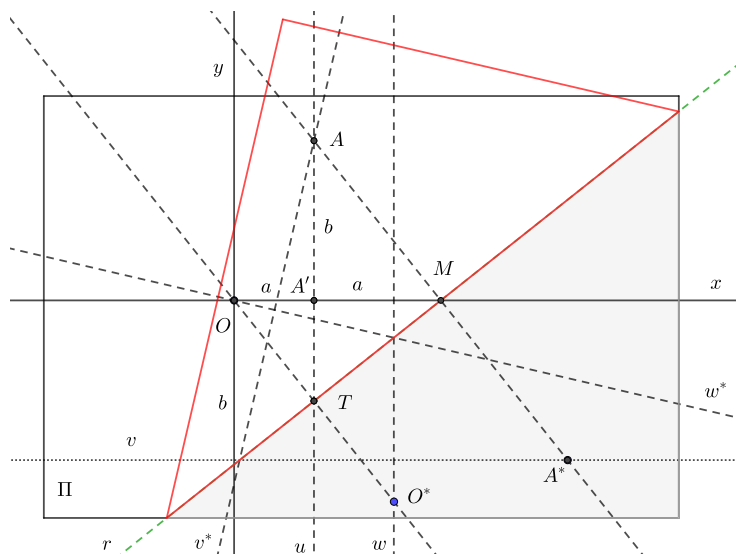
Če zrcalimo O čez r , dobimo točko O^* na premici w , ki ima enačbo $x = 2a$. Premica v , ki ima enačbo $y = -b$, pa se prezrcali čez r v premico v^* , ki poteka skozi A .



Slika 10. Zrcaljenje čez tangento parabole.

Za konstrukcijo daljice z dolžino $\sqrt[3]{a^2b}$ uporabimo tanek prosojen papir Π , na katerem ustvarimo s prepogibanjem med seboj pravokotna prepogiba x in y , ki se sekata v točki O (slika 11). Nato naredimo še prepogiba u in w , ki sta desno od y oddaljena za a oziroma $2a$. Presek med x in u označimo z A' . Na u na razdalji b od x označimo točko A , pod x pa naredimo prepogib v na razdalji b . Nazadnje naredimo prepogib r tako, da O pade v O^* na w , A pa v A^* na v . Presek premic r in u je točka T , za katero je $|A'T| = \sqrt[3]{a^2b}$. Presek daljice AA^* s premico r je točka M , za katero je $|A'M| = \sqrt[3]{ab^2}$.

Če vzamemo a za enoto, je $|A'T| = \sqrt[3]{b}$, če pa izberemo za enoto b , pa je $|A'M| = \sqrt[3]{a}$. S tem smo dvakrat konstruirali tretji koren.



Slika 11. S prepogibanjem papirja do $|A'T| = \sqrt[3]{a^2b}$ in $|A'M| = \sqrt[3]{ab^2}$.

Naloga namesto zaključka

Videli smo, da se z inverzijo na krožnici s središčem v dvojni točki ofiuride le-ta preslika v hiperbolo, ki tudi poteka skozi to dvojno točko. Na isti krožnici se hiperbola z inverzijo preslika nazaj v ofiurido, kar je poseben primer inverzije hiperbole na krožnici, ki ima središče na tej hiperboli.

Če naredimo inverzijo poljubne hiperbole na krožnici, ki ima središče na tej hiperboli, dobimo krivuljo, ki spominja na ofiurido, ni pa nujno ofiurida. Naloga zahteva poiskati na hiperboli tiste točke, ki so lahko središča krožnic, na katerih se ista hiperbola z inverzijo preslika v ofiurido. V katerih točkah hiperbole so tangente pravokotne na eno od njenih asimptot? Ali take točke obstajajo za vsako hiperbolo?

LITERATURA

- [1] D. Haftendorn, *Kurven erkunden und verstehen*, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017.
- [2] B. von Pape, *Von Eudoxus zu Uhlhorn*, Books on Demand, Norderstedt, 2019.
- [3] M. Razpet in N. Razpet, *Prepogibanje papirja, podvojitve kocke in Slusova konhoida*, *Obzornik. mat. fiz.* **67** (2020), 41–51.
- [4] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
- [5] D. Uhlhorn, *Entdeckungen in der höhern Geometrie, theoretisch und practisch abgehandelt*, Schulze'sche Buchhandlung, Oldenburg, 1809.

NOBELOVA NAGRADA 2021 ZA FIZIKO

JOŽE RAKOVEC IN TOMAŽ PROSEN

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

PACS: 89.75.-k, 92.60.Ry

Nobelovo nagrado za fiziko 2021 »za prelomne prispevke k našemu razumevanju kompleksnih sistemov« so prejeli – eno polovico skupaj dva meteorologa: Syukuro Manabe in Klaus Hasselmann »za fizikalno modeliranje klime na Zemlji, kvantificiranje variabilnosti in zanesljivo napovedovanje globalnega segrevanja« in drugo polovico teoretični fizik Giorgio Parisi »za odkritje medsebojnega delovanja nereda in fluktuacij v fizičnih sistemih od atomske do planetarne skale« – in pri tej planetarni skali so se »srečala« področja njihovih raziskav. V članku opisujemo, kaj so nagrajenci odkrili in kako so prišli do teh odkritij.

NOBEL PRIZE 2021 IN PHYSICS

The Nobel Prize in Physics in 2021 was awarded »for groundbreaking contributions to our understanding of complex systems« – one half jointly to two meteorologists – Syukuro Manabe and Klaus Hasselmann »for the physical modelling of Earth’s climate, quantifying variability and reliably predicting global warming« and the other half theoretical physicist Giorgio Parisi »for the discovery of the interplay of disorder and fluctuations in physical systems from atomic to planetary scales« – and on this planetary scale, the areas of their research »met«. In this article we describe what the winners discovered and how they came to these discoveries.

Na spletni strani Kraljeve švedske akademije znanosti o letošnjih Nobelovih nagrajencih iz fizike (www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/summary/) piše:

»Trije nagrajenci si letos delijo Nobelovo nagrado za fiziko za svoje študije kaotičnih in očitno naključnih pojavov. Syukuro Manabe in Klaus Hasselmann sta postavila temelje našega znanja o klimi na Zemlji in kako človeštvo vpliva nanjo. Giorgio Parisi je nagrajen za svoje revolucionarne prispevke k teoriji neurejenih materialov in naključnih procesov.

Za kompleksne sisteme sta značilni naključnost in neurejenost in jih je težko razumeti. Letošnja nagrada se zaveda pomembnosti novih metod za njihovo opisovanje in napovedovanje njihovega dolgoročnega vedenja.

Eden od zapletenih sistemov, ki so ključnega pomena za človeštvo, je klima Zemlje. Syukuro Manabe je pokazal, kako povečane ravni ogljikovega dioksida v ozračju vodijo do povišanja temperatur na površini Zemlje. V šestdesetih letih prejšnjega stoletja je vodil razvoj fizikalnih modelov klime in bil prvi, ki je raziskal interakcijo med sevalnim ravnovesjem in vertikalnim transportom zračnih mas. Njegovo delo je postavilo temelje za razvoj sedanjih klimatskih modelov.

Približno deset let pozneje je Klaus Hasselmann ustvaril model, ki povezuje vreme in klimo, s čimer je odgovoril na vprašanje, zakaj so klimatski modeli lahko zanesljivi, čeprav je vreme spremenljivo in kaotično. Razvil je tudi metode za prepoznavanje specifičnih signalov, prstnih odtisov, ki jih tako naravni pojavi kot človekove dejavnosti vtisnejo v podnebje. Njegove metode so bile uporabljene kot dokaz, da je povišana temperatura v ozračju posledica človeških emisij ogljikovega dioksida.

Okoli leta 1980 je Giorgio Parisi odkril skrite vzorce v neurejenih kompleksnih materialih. Njegova odkritja so med najpomembnejšimi prispevki k teoriji kompleksnih sistemov. Omogočajo razumevanje in opis številnih različnih in na videz povsem naključnih pojavov in neurejenih sistemov, ne le v fiziki, ampak tudi na drugih, zelo različnih področjih, kot so matematika, biologija, nevroznanost in strojno učenje.«

Klima Zemlje in klimatski modeli

Verjetno je primerno, da najprej na kratko opišemo klimo in modele klime na Zemlji. Ti so ali konceptualni, ali pa numerični modeli, zelo podobni tistim za napovedovanje vremena.

Začnimo z najpreprostejšim konceptualnim modelom, glej npr. [26]: Zemlja kot celota v vesoljskem okolju. Energija, ki jo oddaja Sonce, se širi vse naokrog in zato je gostota toka te energije na vse večjih razdaljah od Sonca vse manjša in manjša – pri oddaljenosti do Zemlje znaša v povprečju $j_0 = 1364 \text{ W/m}^2$ (kratkoročno \pm nekaj odstotkov, dolgoročno pa \pm nekaj promil). Ker je naš planet v sončni svetlobi videti prijazno lep – modra morja, zeleni gozdovi, rumen pesek, beli oblaki, vrhovi hribov in polarne kape, to pomeni, da se kar nekaj sončne svetlobe od Zemlje odbije: odbojnost oz. albedo za sončno svetlobo je okrog $a = 31\%$. Preostalih 69% Zemlja absorbira s površino S svojega krožnega preseka, torej je prejeta moč $P_{\text{abs}} = S(1 - a)j_0$. Če se ne ukvarjamo s preteklimi geološkimi obdobji ali pa s sedanjim hitrim globalnim segrevanjem, je bila pred dva tisoč leti v času Rimskega imperija približno taka klima, kot je danes. Torej velja, da je Zemlja v sevalnem ravnovesju in oddaja v vesolje toliko energije, kot je prejema. Oddaja jo s svoje celotne površine, ki je štirikrat večja od krožnega preseka, in to s sevanjem po Stefanovem zakonu v infrardečem območju (IR): $P_{\text{odd}} = 4S\sigma T^4$ ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$). Ko to izenačimo, dobimo enačbo $4\sigma T^4 = (1 - a)j_0$ in hitro lahko izračunamo, kolikšna bi bila po tem preprostem modelu ravnovesna temperatura Zemlje: $T \approx -20^\circ\text{C}$. Malo!? Seveda, saj še nismo upoštevali vpliva tople grede, tega, da je tukaj spodaj relativno toplo, tam zgoraj, kjer letajo letala, pa okrog -50°C . Topla greda je posledica lastnosti nekaterih plinov v ozračju, da absorbirajo IR-sevanje, ki ga oddajajo tla, a tudi sami sevajo – glede na svojo temperaturo v ozračju. Upoštevajmo torej še vpliv tople grede, h kateremu prispeva največ –

približno 60 % – vodna para H_2O , ki je je v ozračju veliko, pa okrog eno petino CO_2 , potem pa še metan, ozon, didušikov oksid itd.! Ko vstavimo med tla in vesolje še ozračje s približno 70-odstotno sposobnostjo absorpcije in oddajanja IR-sevanja, dobimo še eno dodatno ravnovesno bilanco, iz česar sledi $T_{\text{tal}} = +9^\circ\text{C}$ in $T_{\text{ozr}} = -36^\circ\text{C}$. Pri tleh je torej še vedno precej hladno! A ko vključimo še vpliv oblakov na IR-sevanje in prenose toplote s konvekcijo in izhlapevanjem iz tal, pa pridemo do poznanih povprečnih 15°C pri tleh.

Kaj pa **numerični klimatski modeli**? Če preprosti 1D-konceptualni modeli ne zmorejo predstaviti razlik sem in tja po Zemlji, pa jih 3D-numerični lahko. Z modeli, podobnimi tistim za napoved vremena, računajo dolgo, tako dolgo, da dogajanje v njih že »pozabi« na razmere, od katerih so model pognali. Potem dogajanja ne določajo več začetni pogoji, ampak razmere skozi letne čase. Model za napoved vremena si je zamislil že Vilhelm Bjerknes pred približno sto leti [8]. A kaj, ko je model računsko zelo zahteven. Dogajanje namreč opisujejo parcialne diferencialne enačbe: za gibalno količino (Euler–Navier–Stokes–Coriolisova enačba), termodinamska energijska enačba (dodajanje toplote, stiskanje/razpenjanje, fazne spremembe vode), pa zakon o ohranitvi mase (kontinuitetna enačba) in edina »lahka« enačba je enačba stanja. Te enačbe so zaradi advekcije (veter prenaša količine sem in tja) in ker vse lastnosti zraka v njih turbulentni vrtinci razpršujejo naokrog, tudi nelinearne. Analitično je sistem enačb tako zapleten, da zanj sploh še ni bil dokazan obstoj rešitve, kaj šele ene same enotne rešitve (eksistenčni pogoj). Zato ni čudno, da je bil Bjerknes prisiljen poiskati alternativno pot – t. i. sinoptično metodo. Tudi zelo sposobni in hitri računarji namreč ne bi mogli dohitevati sprotnega razvoja vremena, kaj šele, da bi ga prehitevali in ga tako napovedovali. Po Bjerknesu je Lewis Fry Richardson sicer mukotrпно (več mesecev računanja!) izračunal eno numerično rešitev, a kaj, ko je bil rezultat povsem napačen – v resnici celo nemogoč [27]. In šele leta 2000 je Peter Lynch pokazal, da se Richardson ni niti enkrat zmotil – pokopali so ga slabi, med seboj neusklajeni začetni podatki [17]. No, po drugi svetovni vojni pa so imeli meteorologi že na razpolago prve elektronske računalnike in tako so se Jule Charney, Phillip Thompson, Ragnar Fjortoft (iz Bjerknesovega gnezda), John Freeman, George Platzman, Joseph Smagorinsky, Jerome Namias in še nekateri drugi ob pomoči matematika in enega od utemeljiteljev računalništva Johna von Neumanna, lahko lotili računanja za napoved vremena [6, 18]. Ker so bili takrat računalniki sicer ogromne omare, a računsko še zelo ubogi, so morali sistem enačb poenostaviti in za preprostejše (barotropne) primere jim je uspelo dobiti nekaj 24-urnih napovedi vremena, ki so se zelo dobro skladale s tem, kar se je res pokazalo za naslednji dan. Pot za numerično simuliranje vremena in klime je bila tako odprta ...

Kakšen je torej sodoben klimatski model? Bolj ali manj tak kot model za napoved vremena, toda najpopolnejši vključujejo poleg dogajanja v ozračju

še tista v tleh, oceanih, upoštevajo led na njih, pa bolj podrobno aerosole v ozračju, seveda sestavo in kemijo ozračja, pa precej podrobno izmenjave z vegetacijo, s planktonom itd. Prostorska ločljivost po horizontali je okrog 25 km krog in krog Zemlje, imajo do 80 in več plasti v ozračju oz. računskih nivojev v modelu, med 30 in 60 vertikalnih računskih nivojev v oceanih, pa nekaj nivojev v kopnih tleh. Od modelov za napoved vremena se razlikujejo predvsem po bolj podrobni obravnavi tokov v oceanih, prenosov toplote in vlage v tleh, bolj podrobni obravnavi vegetacijskih ciklov in sevanja ipd. (V vremenskih modelih je npr. stanje vegetacije lahko kar konstantno, saj se v dveh tednih, kolikor obsega tipična napoved vremena, vegetacija komaj kaj spremeni. Pri oceanih so za vreme najvažnejši temperatura površinske vode, hrapavost površine zaradi valov in morda še izhlapevanje, tokovi v globinah pa niti ne ipd.). Ker klimatske modele poganjajo skozi mesece, leta, desetletja, torej – kot smo že rekli – pozabijo svoje začetno stanje in se obnašajo predvsem glede na kemijsko sestavo ozračja in sončno obsevanje posameznih predelov Zemlje ter s tem glede na letne čase. Računanje za tako dolgo obdobje seveda pomeni tudi, da zahtevajo ogromno računskega časa, ker pa imajo tudi skoraj tako ločljivost kot modeli za napoved vremena, pa je tudi zahtevana računaska moč zelo velika (več sto Tflops) [32, 13].

Dva nagrajenca – meteorologa

Syukuro Manabe je meteorolog japonskega rodu, ki je meteorologijo doštudiral v Tokiu in se po doktoratu 1959 preselil v Združene države [40]. Tam ga je Joseph Smagorinsky, ki je razvijal tridimenzionalne numerične modele ozračja za proučevanje splošnega kroženja ozračja (pa tudi za napovedovanje vremena), pritegnil k raziskovanju splošnega kroženja ozračja pri oddelku Urada za meteorologijo imenovanega General Circulation Research, ki se je kasneje preoblikoval v Geophysical Fluid Dynamics Laboratory (GFDL) v okviru NOAA. Tam je Manabe raziskoval skoraj dvajset let – do 1997. Za štiri leta se je vrnil na Japonsko, kjer je vodil skupino za proučevanje globalnega ogrevanja planeta, ter se 2002 vrnil v ZDA na raziskovalno Univerzo v Princetonu v New Jerseyju, kjer je vodilni meteorolog, kot gostujoči profesor pa uči tudi na Japonskem na Univerzi v Nagoji. Dobil je številne nagrade in priznanja. Med meteorologi bo morda največ veljala raziskovalna medalja Carla-Gustava Rossbyja – eno od treh priznanj, ki jih je dobil od Ameriškega meteorološkega združenja (AMS, American Meteorological Society) – poleg drugih ameriških nagrad in priznanj. Evropsko združenje za znanosti o Zemlji (European Geosciences Union EGS) mu je podelilo medaljo Milutina Milankovića, od domače Japonske je dobil državni red kulture in dve priznanji Asahi, pa še in še.

Nobelovo nagrado 2021 je dobil predvsem za to, ker je na fundamentalnem nivoju razložil vpliv toplogrednih plinov na klimo na Zemlji. Z nu-

meričnim modelom za splošno kroženje ozračja (general circulation model GCM) je raziskal ne samo sevalno energijsko bilanco ozračja in tal, ampak je v energijsko bilanco vključil tudi vodni cikel (članek leta 1965 s Smagorinskym in Stricklerjem, [20]), razporeditve vlažnosti v ozračju in vpliva količine CO₂ v ozračju 1967 z Wetheraldom, [22], leta 1969 povezal model ozračja z modelom oceanov (z Bryanom, [19]) in ker je 1975 s 3D GCM modelom z Wetheraldom [21] pokazal, kako podvojitve količine CO₂ v ozračju na dogajanje in spremenljivke v modelu splošnega kroženja ozračja vpliva na gibalno količino, temperaturo, količino padavin, debelino snežne odeje itd. Morda je za vtis o vplivu podvojitve CO₂ v ozračju še najbolj pokazati vertikalni presek skozi ozračje od ekvatorja (na spodnji sliki 1 desno) do pola (levo) ter od tal (spodaj) do velikih višin (zgoraj – okrog 50 km visoko).

Temperatura naj bi se po tej simulaciji pri tleh zvišala okrog ekvatorja za kaki dve stopinji, v visokih geografskih širinah pa tudi do 10 stopinj. Precej pa naj bi se ohladila stratosfera (spodnja slika 1).

Manabe (s sodelavci) je do nadaljnjih ugotovitev o vplivih konvekcije, vlažnosti ozračja, količini CO₂ itd. prišel s 3D-numeričnim modeliranjem. Na kratko opišimo tak model. Za začetne simulacije (1965) so on, Smagorinsky in Strickler izpopolnili Phillipsov numerični kvazi-geostrofski model splošnega kroženja ozračja (general circulation model GCM). Norman Phillips je namreč desetletje prej [25] tak model uporabil za prvo numerično klimatsko simuliranje splošne cirkulacije na planetu v dveh plasteh ozračja (samo toliko so omogočali takratni računalniki) v pasu krog in krog Zemlje (tako se je tudi izognil potrebi po enem od robnih pogojev). Ob predpostavki o pretežno geostrofskem ravnotežju dve komponenti horizontalne hitrosti (u , v) nadomesti vertikalna komponenta vrtničnosti ($\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$) in tako ostane za izračunavanje ena spremenljivka manj. Model so torej preuredili iz kvazi-geostrofskega v model s prvotnimi (primitivnimi) enačbami: dve enačbi za obe komponenti horizontalne hitrosti, termodinamska energijska enačba in kontinuitetna enačba. Vertikalni prenos gibalne količine (in posredno trenje pri tleh) so parametrizirali na Prandtlov način z dolžino mešanja. Model so razširili na devet plasti (takrat je računalniška moč to že dovoljevala) in uporabili Phillipsovo vertikalno koordinato σ (računski nivoji bolj na gostoto pri tleh, vse višje pa plasti vse debelejšje). Predpisali so, da s tropi ni izmenjav toplote in gibalne količine (na jugu v modelu toplotno izolirana vertikalna stena brez trenja). Krajevne odvode v enačbah so nadomestili s količniki končnih razlik, razlike v času pa so omogočale postopno napredovanje po končnih korakih (seveda ob upoštevanju CFL-pogoja za numerično stabilnost). Tako so od diferencialnih enačb prešli na sistem algebrائيh enačb in rešitve po daljšem času naprej so se približale klimatskim. Mreža računskih točk ni bila po vzporednikih in poldnevnikih, horizontalna ločljivost je bila okrog 320 km ob ekvatorju, 540 km pri 45° g. š. in 640 km blizu pola. Ker posameznih stebrov vertikalne konvekcije taka

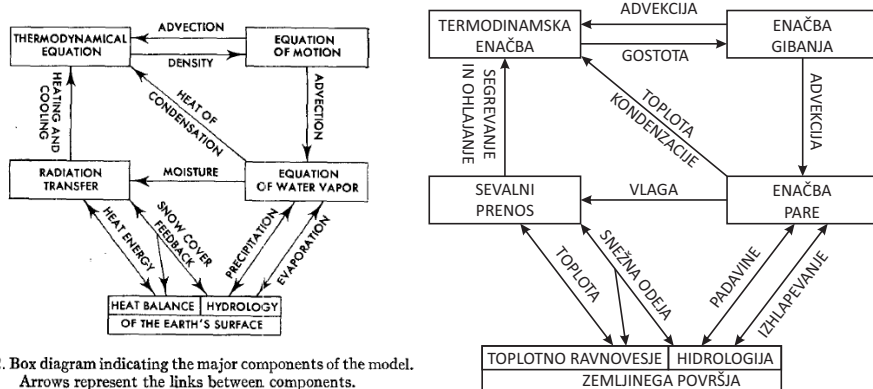


Fig. 2. Box diagram indicating the major components of the model. Arrows represent the links between components.

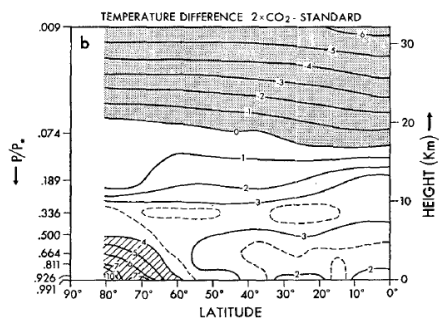


FIG. 4. Latitude-height distribution of the zonal mean temperature (K) for the standard case (a) and of the increase in zonal mean temperature (K) resulting from the doubling of CO₂ concentration (b). Stippling indicates a decrease in temperature.

Razlika med simulacijama z dvakratno koncentracijo in standardno koncentracijo CO₂; na abscisni osi – geografska širina, na ordinatni osi – na levi zračni tlak normiran s tlakom pri tleh, na desni višina.

Slika 1. Zgoraj: Shematični prikaz, kaj vse je upošteval klimatski model Manabeja in Wetheralda leta 1975. Spodaj: Kako se spremeni zonalno povprečna temperatura v ozračju, če se v model vstavi podvojeno količino CO₂. Oboje iz članka v *J. Atm. Sci.* **32** (1975), dostopno na journals.ametsoc.org/view/journals/atms/32/1/1520-0469_1975_032_0003_todtc_2_0_co_2.xml. Published (1975) by the American Meteorological Society.

groba ločljivost seveda ne zazna, so za to in druga pod mrežna dogajanja morali eksplicitno opisanim dogajanjem dodati parametrizacije pod mrežnih dogajanj. Prostodušno so npr. za konvekcijo priznali, da »In view of our ignorance in this matter, we used a very simple scheme of convective adjustment ...«, a dodali, da so se vseeno uspešno izognili morebitnemu pretiranemu pojavu konvekcije na skali ločljivosti modela [28]. V prvih simulacijah je sevanje opisano še relativno preprosto, potem pa vse bolj podrobno.

Manabe je torej raziskoval predvsem tako, da je z modelom GCM za splošno kroženje ozračja numerično modeliral, kako razni dejavniki v modelu (suho ozračje/vlažno ozračje, konvekcija da/konvekcija ne, več CO₂/manj

CO₂, ...) vplivajo na procese v modelu po daljšem času – na simulirano klimo.

Klaus Hasselmann [38] pa je raziskoval nekoliko drugače – po eni strani na bolj teoretični način, pa tudi s pomočjo sklopljenega modela ozračja in oceanov. Fiziko in matematiko je Hasselmann doštudiral na Univerzi v Hamburgu in 1957 doktoriral v Göttingenu iz proučevanja turbulence. Posvetil se je meteorologiji, pa tudi oceanografiji. Ustanovil je Inštitut Maxa Plancka za meteorologijo (IMP) v Hamburgu in bil od leta 1975 do novembra 1999 njegov direktor, od 1988 do 1999 pa znanstveni direktor v Nemškem klimatskem računalniškem centru. Na tem inštitutu so v 90. letih prejšnjega stoletja razvili sklopljeni model: model Evropskega centra ECMWF so povezali z IMP-jevim modelom oceanov LSG (glej npr. intervju s Hasselmannom iz leta 2006 [36]). Tudi Hasselmann je dobil številne nagrade: spet se bo meteorologom morda zdela pomembna medalja Vilhelma Bjerknesa, ki mu jo je podelila EGS, pa morda Symonsova medalja, ki mu jo je podelila Royal Meteorological Society (RMS), Sverdrupova medalja AMS, oceanografom bi morda veliko pomenilo več medalj in nagrad iz njihovih krogov, Hasselmann je dobil še priznanja in medalje akademij, ter še in še ...

Hasselmann je raziskoval vreme in klimo kako desetletje za Manabejem. Teoretično je pomagal odgovoriti na vprašanje, zakaj so klimatski modeli lahko zanesljivi kljub spremenljivemu in kaotičnemu vremenu [10]. Teoretično je razvil tudi metode za prepoznavanje specifičnih signalov, ki jih naravni pojavi in človeške dejavnosti vtisnejo v podnebje, in dokazal, da sedanje zviševanje temperature zraka lahko pripišemo človekovim emisijam ogljikovega dioksida in drugih toplogrednih plinov [9].

Na področju klimatskih sprememb je Hasselmann pionir matematičnega opisa stohastičnega vpliva klime zaradi spremenljivega vremena – članek 1976 v Tellusu [10]. V njem razloži, da spremembe klime niso posledica zgolj zunanjih vzrokov (sončno obsevanje in količina toplogrednih plinov), ampak v določenih pogojih tudi naključno razvijajočih se vremenskih vzorcev. Pravi, da je »bistvena lastnost stohastičnosti klimatskih modelov, da se ohranijo tudi nepovprečne »vremenske« komponente. Formalno se pojavljajo kot členi naključnega siljenja. Klimatski sistem, ki deluje kot integrator tega kratkotrajnega vzbujanja, kaže podobno naključno sprehajanje (random-walk) kot veliki delci, na katere vpliva skupina veliko manjših delcev – kot v analognem problemu Brownovega gibanja.« Torej kot da težek delec (klimo) bombardirajo naključno premikajoči se majhni delci (vreme). Hasselmann je to idejo prevedel v zapleten mnogodimenzionalen nelinearni sistem. Gledal je hitra in počasna dogajanja in spektre teh dogajanj. V frekvenčnem spektru se spremenljivost izraža kot inverzna vrednost kvadrata frekvenc. Tako npr. nestacionarno dogajanje predstavlja vrednosti blizu inverzne vrednosti nič in spektralna analiza dogajanja s končnim trajanjem ima vrh pri tej inverzni ničelni frekvenci. Tako je Hasselmann enim in drugim dogajanjem priredil pripadajoče vrednosti v spektru. S tem je

kvantitativno opredelil pomembnost enih in drugih dogajanj. Ko jim je priredil vrednosti, je lahko nadaljeval analizo z uporabo Fokker-Planckove enačbe statistične mehanike, dobil nekatere posebne rešitve in jih uporabil za študij klime in njenih sprememb.

Hasselmann je kasneje (objava 1993 v *Journal of Climate*, [9]) tudi teoretično raziskal, kako razločiti »prstne odtise« antropogeno povzročenih klimatskih sprememb od naravnih, npr. od vpliva izbruhov ognjenikov – kako na optimalen način izluščiti signal sistematičnih klimatskih sprememb iz močne spremenljivosti klime. Za izluščenje od človeka povzročene signala je – na tem kompleksnem sistemu s številnimi spremenljivkami v odvisnosti od prostora in časa – uporabil svojo prej (1979) razloženo metodo razlikovanja signala od šuma in predlagal empirične ortogonalne funkcije in optimalne linearne filtre. To so potem nekaj let kasneje na dejanskih podatkih uporabili Gabriele Hegerl, Hasselmann in sod. (*Climate dynamics* 1997, [11]), za njimi pa še drugi, npr. spet Gabi Hegerl s sodelavcema Francisom Zwiersom in Claudio Tebaldi (2011 v *Env. Res. Lett.*, [12]). Prikaz takega izluščanja so povzela tudi poročila IPCC kot dokaz, da gre res za pomemben človekov vpliv, pa tudi Nobelov odbor v svoji utemeljitvi za nagrado.

Grafi na sliki 2 so si na pogled podobni, prikazujejo pa različne stvari. Zgornja slika iz [9] kaže, da praktično vsa informacija o časovni spremembi temperature pri tleh pripada prvi empirični ortogonalni funkciji za 2D-polje sprememb pri numerični simulaciji klime, ki upošteva tako vpliv toplogrednih plinov kot tudi vpliv sulfatnih aerosolov v ozračju. Spodnja slika, ki jo je Nobelov odbor za fiziko (www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/summary/) povzel iz članka Hegerl, Zwiers in Tebaldi, 2011 [12], pa kaže, da naraščanje temperature v obdobju od 1960 dalje lahko pripišemo človeškemu vplivu (rdeča črta), saj naravni vzroki (modra črta) vzdržujejo temperaturo ves čas na približno istem nivoju, pri čemer glavne fluktuacije lahko pripišemo vulkanskim izbruhom.

Hasselmann je torej raziskoval precej teoretično, s sodelavci pa seveda teoretično pridobljene metode tudi preskusil na podatkih o klimi skozi različna obdobja.

Nagrajeni teoretični fizik

Polovico fizikalne nagrade 2021 je dobil italijanski teoretični fizik **Giorgio Parisi** [35] za »odkritje medsebojnega delovanja nereda in fluktuacij v fizičnih sistemih od atomske do planetarne skale« (pri planetarni skali se srečajo raziskave Manabeja, Hasselmann in Parisia). Parisi se je šolal na La Sapienzi v Rimu, raziskuje pa na področjih kvantne teorije polja, statistične mehanike in kompleksnih sistemov. Raziskoval je v Laboratori Nazionali di Frascati (1971–1981), bil gostujoči raziskovalec na Columbia University

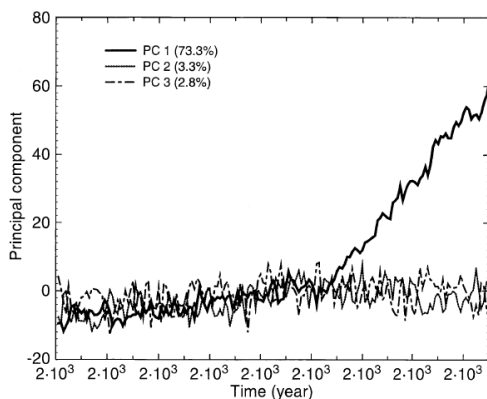
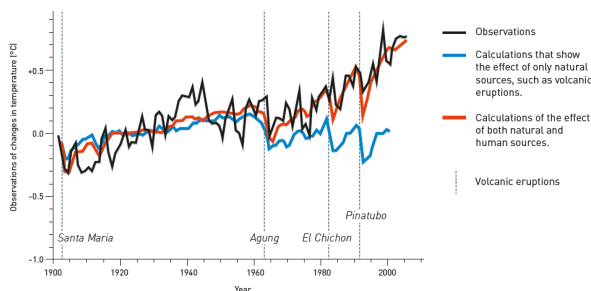


Fig. 4. Time evolution of the first 3 EOFs of the mean of the two greenhouse gas-plus-aerosol forcing simulations. The first EOF captures most of the increasing climate change signal, while higher EOFs contain mainly noise

Identifying fingerprints in the climate

Klaus Hasselmann developed methods for distinguishing between natural and human causes (fingerprints) of atmospheric heating. Comparison between changes in the mean temperature in relation to the average for 1901–1950 [°C].



Source: Hegerl and Zwiers (2011) Use of models in detection & attribution of climate change, *WIREs Climate Change*.

Slika 2. Zgoraj: Prve tri empirične ortogonalne funkcije iz članka Gabriele Hegerl, Klauza Hasselmann in sod. iz *Climate Dynamics* 1997 [11] link.springer.com/article/10.1007/s003820050186. ©CCC RightsLink. Spodaj: Slika iz obrazložitve Nobelovega odbora za fiziko www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/summary/, povzeta iz članka Hegerl, Zwiers in Tebaldi, *Env. Res. Let.* 2011 [12]. ©Johan Jarnestad/The Royal Swedish Academy of Sciences.

Empirične ortogonalne funkcije za simulacijo ovrednotenja sprememb klime v obdobju 160 let. Na abscisni osi je pomotoma povsod zapisan čas 2000 let ($2 \cdot 10^3$ Years); v resnici gre za celotno obdobje simulacije od leta 1880 do 2049. Na ordinatni osi so prikazane vrednosti empiričnih ortogonalnih funkcij.

Spremembe temperature v obdobju 1900 do 2010 glede na predindustrijsko obdobje; črna črta – izmerjene spremembe temperature, rdeča črta – simulirane spremembe temperature zaradi človeških in naravnih vplivov, modra črta – simulirane posledice samo naravnih vplivov. Prikazani so tudi časi najmočnejših izbruhov vulkanov.

(1973–1974), na Institut des Hautes Études Scientifiques (1976–1977) in École Normale Supérieure (1977–1978). Bil je profesor za teoretično fiziko na rimski univerzi Tor Vergata ter predsednik znamenite rimske akademije znanosti Academia dei Lincei, sedaj pa je profesor kvantne mehanike na

rimski La Sapienzi. Tudi on je že pred Nobelovo nagrado dobil cel kup priznanj, npr. Boltzmannovo, Diracovo, Fermijevo, Lagrangevo, Planckovo, Onsagerjevo medaljo, pa še druge.

Okoli leta 1980 je Giorgio Parisi predstavil svoja odkritja o tem, kako navidezno naključne pojave urejajo skrita pravila. Posebej temeljno pomemben je njegov prispevek [23, 24] k razumevanju obnašanja spinskih stekel na osnovi rešitve problema spontanega zloma simetrije med replikami. Parisijevo delo danes velja za enega najpomembnejših prispevkov k teoriji kompleksnih sistemov. Sodobne študije kompleksnih sistemov temeljijo na statistični mehaniki, ki so jo v drugi polovici 19. stoletja razvili James C. Maxwell, Ludwig Boltzmann in J. Willard Gibbs, ki so to področje tako poimenovali leta 1884. Statistična mehanika se je razvila iz spoznanja, da je za obravnavo plinov ali tekočin, ki so sestavljeni iz velikega števila delcev, potrebna nova metoda za opis teh sistemov. Ta metoda je morala upoštevati naključne premike delcev, zato je bila osnovna ideja izračunati povprečne učinke delcev. Statistična mehanika zagotavlja mikroskopsko razlago za makroskopske lastnosti plinov in tekočin, kot sta temperatura in tlak.

Preprost primer iz stohastičnosti in kompleksnosti: delce plina obravnavamo kot kroglice in ko temperatura pade ali se tlak poveča, se kroglice najprej kondenzirajo v tekočino in nato v trdno snov. Ta trdna snov je pogosto kristal, kjer so kroglice organizirane v pravilnem vzorcu. Če pa se ta sprememba zgodi hitro, se lahko kroglice združijo v nepravilen oziroma neurejen vzorec, ki se ne spremeni, tudi če se tekočina dodatno ohladi ali dodatno stisne skupaj. Pri ponovljenem poskusu bodo kroglice prevzele spet nov, malce drugačen vzorec, kljub temu da se sprememba (znižanje temperature) zgodi na popolnoma enak način.

Te stisnjene kroglice so eden od preprostih modelov za navadno steklo ali za zrnate materiale, kot sta pesek ali gramoz. Vendar je bil predmet Parisijevega prvotnega dela drugačen sistem – spinsko steklo. To je teoretičen model, ki opisuje posebno vrsto kovinske zlitine, v kateri so npr. atomi železa naključno pomešani v mrežo atomov bakra. Čeprav je v mreži le nekaj atomov železa, spremenijo magnetne lastnosti materiala na radikalen in zelo neurejen način. Vsak atom železa se obnaša kot majhen magnet oz. ima magnetni moment, na katerega vplivajo drugi atomi železa v bližini. Pri navadnem magnetu so vsi magnetni momenti ob prisotnosti zunanega polja usmerjeni v isto smer, v spinskem steklu pa so frustrirani: nekateri pari se usmerijo v isto smer, drugi pa v nasprotno smer – kako torej najdejo optimalno orientacijo? Giorgio Parisi je odkril skrito strukturo v tako zapletenih neurejenih sistemih in našel način, kako jih matematično opisati. Tako je našel pomemben ključ za obravnavo kompleksnih sistemov. V sedemdesetih letih prejšnjega stoletja so številni fiziki, vključno z več Nobelovimi nagrajenci, iskali način, kako opisati skrivnostna in frustrirajoča spinska stekla. Ena od metod, ki so jo uporabili, je bil trik replike, to je ma-

tematična tehnika, pri kateri se hkrati obravnava ansambel identičnih kopij sistema [3]. Vendar pa so bili v fizikalnem smislu rezultati prvotnih izračunov napačni. Fizikalno zelo smiselna predpostavka permutacijske simetrije med replikami je npr. vodila do nesmiselnih rezultatov, kot je negativna entropija. Tudi prve sugestije spontanega zloma simetrije med replikami [3, 4] niso dale smiselnih rezultatov.

Leta 1979 pa je Parisi torej naredil odločilen preboj, ko je z genialnim svežim pristopom pokazal, kako je mogoče trik replike uporabiti za reševanje problema spinskih stekel. V replikah je odkril skrito strukturo in našel matematično smiseln način, kako popisati fazni prehod zloma simetrije replik s pomočjo neskončno-dimenzionalnega parametra ureditve, nekakšnega tenzorja v abstraktnem vektorskem prostoru, katerega dimenzijo n določa število replik. Ključna ideja metode je korektno izvesti limito, ko gre n proti 0, ki na koncu omogoča konkreten izračun proste energije in drugih termodinamskih količin.

Morda ni presenetljivo, da so v začetku matematiki in bolj strogo misleči matematični fiziki ob tej metodi zmajevali z glavo. Trajalo je kar nekaj let, da se je Parisijeva rešitev izkazala za matematično pravilno in dokazljivo. Tallagrand jo je tako leta 2006 utemeljil v najprestižnejši matematični reviji *Annals of Mathematics* [29] kot »temeljni izrek matematične analize«. Od takrat naprej oziroma že prej pa je bila Parisijeva metoda uporabljena v številnih neurejenih sistemih in je postala temelj teorije kompleksnih sistemov. V zadnjem času so poročali celo o nazornih eksperimentalnih realizacijah Parisijevega mehanizma, npr. v neurejenih laserjih [7].

Poleg prispevka k teoriji spinskih stekel je treba spomniti na številne druge temeljne Parisijeve prispevke v statistični fiziki, ki danes navdihujejo na tisoče raziskovalcev. Posebej je treba omeniti vsaj še Kardar-Parisi-Zhangovo (KPZ) enačbo, to je stohastična parcialna diferencialna enačba, ki opisuje rast neurejenih površin [14]. Šele v zadnjih letih postaja jasno, kako splošna je vloga KPZ enačbe v neravnovesni statistični fiziki, ki se pojavlja v fizikalno zelo različnih kontekstih, od rasti površin ob depoziciji snovi, modeliranja prometa na avtocestah, do anomalnega transporta snovi, ki je učinkovitejši od difuzije. Zato se nanjo večkrat sklicujemo tudi kot na KPZ univerzalnostni razred, ki v neravnovesni fiziki igra podobno vlogo kot npr. Isingov model v ravnovesni statistični mehaniki. V zadnjih letih smo npr. v Ljubljani našli novo in povsem nepričakovano manifestacijo KPZ enačbe v kvantnem magnetizmu v modelih z netrivialnimi simetrijami [15].

Parisijski prispevki k razumevanju dinamičnih procesov v kompleksnih sistemih in dinamičnih sistemov na splošno ga tematsko tudi približajo delu meteorologov Manapeja in Hasselmanna. Za potrditev te teze samo omenimo Parisijev prispevek k članku o stohastični resonanci v klimatologiji [2].

Zakaj prav te nagrade?

Seveda ne vemo, kakšne predloge so dobili in kaj so premlevali v Nobelovem odboru za fiziko. Videti pa je, da so predlagatelji in odbor želeli opozoriti na pomembnost raziskav o klimi in o podnebnih spremembah. Tako so s področja proučevanja klime in njenih sprememb izbrali Manabeja in Hasselmanna, pridružili pa jima še Parisija kot teoretika na podobnem področju – kompleksni, stohastični sistemi s številnimi spremenljivkami.

Ob nagradi za proučevanje klime in podnebnih sprememb moramo spomniti na matematika Josepha Fourierja, ki je že pred dvesto leti (1827, [37]) opozoril na vpliv plinov v ozračju – IR-absorberjev – na sevalno bilanco Zemlje. Vsekakor je treba omeniti še Svanteja Arrheniusa, švedskega fizika in fizikalnega kemika, ki je 1896 uporabil načela fizikalne kemije, da bi ocenil, v kolikšni meri bi bilo povečanje atmosferskega ogljikovega dioksida odgovorno za naraščajočo temperaturo površine Zemlje, [39]. (Leta 1903 je dobil Nobelovo nagrado za kemijo. Menda pa je pri teh nagradah kot član odbora tudi protežiral svoje prijatelje in sodelavce, druge pa zaviral – vsaj tako pravi Wikipedija [39]). Večinoma sicer več beremo o Arrheniusu kot o Tyndallu, a treba je povedati, da je John Tyndall o topli gredi imel predavanje že januarja 1863 [31], torej pred Arrheniusovimi objavami.

Naj si na koncu dovolimo še vprašanje, ali bi si morda še kak meteorolog zaslužil tako ali podobno visoko nagrado?

No, zaslužil bi jo Vilhelm Bjerknes, a takrat, v začetku 20. stoletja je bilo v fiziki toliko epohalnih odkritij, da niti Einstein ni prišel na vrsto za nagrado za relativnost, temveč za fotoefekt. Pa tudi: Bjerknes je sicer predlagal sistem enačb za opis dogajanj v ozračju, a tedaj – v predračunalniški dobi – ga ni mogel zares uporabiti. Da pa je zares zaslužen, pa priča npr. Symonsova medalja RMS in to, da EGS podeljuje medaljo, poimenovano po njem.

Potem bi visoke nagrade zaslužil Jule Charney skupaj z Johnom von Neumannom – prvi za res inovativne ideje okrog numerične napovedi vremena, drugi pa za izjemno matematično pomoč pri numerični napovedi, saj je ravno von Neumann zasnoval koncept v računalnik shranjenega računalniškega programa. (Ne edini, z Alanom Turingom in Claudom Shannonom. A kot vemo, za matematiko Nobelove nagrade ni). Bjerknes je ravno še doživel to prvo uspešno računanje Charneya in sodelavcev po svojem sistemu enačb – a tudi če bi nagrado za to podelili zelo hitro, je Bjerknes žal ne bi dočakal, saj je umrl pet mesecev po objavi o tem novembra 1950 v Tellusu. Jule Charney bi visoko nagrado zaslužil tudi za kvazi-geostrofsko teorijo in odkritje barokline nestabilnosti, kajti prva uspešna numerična napoved je bila izračunana z barotropno vrtnično enačbo, ki pa ne zmore napovedati »tistega, česar še ni«. Tisto, »česar še ni«, namreč nastaja v območjih barokline nestabilnosti [5]. Ali bi jo za to odkritje Charney zaslužil sam, ali pa morda za baroklinost z njim še Eric Eady, ki je v svoji disertaciji pri-

kazal pojav barokline nestabilnosti na drugačen, morda še lažje razumljiv način [33]. Za kvazi-geostrofsko teorijo pa morda še Phill Thompson, ki je v dopisovanju s Charneyem le-tega močno motiviral z vprašanji in dilemami, ko se je sam mučil s tem, kako naj bi računal divergenco v ozračju [30]? Je pa Charney seveda dobil veliko nagrad in medalj, med njimi Symonsovo medaljo RMS, Rosbyjevo medaljo AMS, nagrado Svetovne meteorološke organizacije (WMO), medaljo Smithsonian Institution, posebna čast pa je tudi, da AMS od leta 1983 podeljuje medaljo, s katero časti tudi njega – medaljo Jula Charneya.

Kaj pa Carl Gustav Rossby – saj je vendar on odkril, zakaj se ozki transverzalni valovi toka v ozračju v zmernih geografskih širinah hitro premikajo proti vzhodu, široki pa počasi, ali se morda ne premikajo, ali pa gredo celo malce »nazaj«. To lastnost, pomembno za napoved vremena, so prognostiki že prej opazili npr. na zaporednih vremenskih kartah tokovnic na 500 mbar, Rossby pa je odkril preprosto, a zelo prepričljivo razlago za to. Rossby je dobil več nagrad od aeronavtičnih institucij in iz meteoroloških krogov, npr. Symonsovo zlato medaljo RMS, nagrado WMO, nagrado AMS, po njem pa se imenuje tudi medalja, ki jo podeljuje AMS.

Namesto Crafoordove medalje bi lahko Švedska kraljeva akademija Edwardu Lorenzu [34] podelila tudi Nobelovo nagrado (nekateri ju ocenjujejo za precej enakovredni, a je seveda Nobelova precej bolj znana). Njegovo odkritje determinističnega kaosa bi jo zaslužilo. Do determinističnega kaosa je prišel, ko je proučeval dokaj preprost, a nelinearen problem konvekcije med toplo površino spodaj in hladnejšo zgoraj, s čimer sta se ukvarjala pred njim že lord Rayleigh in Henri Bénard [16]. No, seveda je Lorenz dobil veliko drugih prestižnih nagrad in odlikovanj – Rossbyjevo, Symonsovo, Buys-Ballotovo medaljo, medaljo Lomonosova, pa nagrado WMO, Kyoto Prize . . . , AMS pa je nagrade za pedagoško odličnost leta 2013 preimenovala v Lorenzove nagrade za tovrstno odličnost.

Morda še kdo? Pri tem moramo za Nobelove nagrade upoštevati, da jih dobivajo le živeči znanstveniki – posthumnih Nobelovih nagrad ni.

Še več o letošnjih nagrajencih je objavljeno tudi v Proteusu.

LITERATURA

- [1] S. Arrhenius, *On the influence of carbonic acid in the air upon the temperature of the ground*, Phil. Mag. and J. of Sci. **41** (1896), 237–276.
- [2] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera in A. Vulpiani, *Stochastic resonance in climatic change*, Tellus **34** (1982), 10.
- [3] A. Blandin, *Theories versus experiments in the spin glass systems*, J. Phys. Coll. **39** (1978), C6–1499.
- [4] A. J. Bray in M. A. Moore, *Replica symmetry-breaking in spin-glass theories*, Phys. Rev. Lett. **41** (1978), 1068.
- [5] J. G. Charney, *The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current*, J. Atmos. Sci. **4** (1947), 136–162, dostopno na [doi.org/10.1175/1520-0469\(1947\)004<0136:TDOLWI>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1947)004<0136:TDOLWI>2.0.CO;2), ogled 3. marca 2022.

- [6] J. G. Charney, R. Fjörtoft in J. Von Neumann, *Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation*, *Tellus* **2:4** (1950), 237–254, DOI: 10.3402/tellusa.v2i4.8607, dostopno na www.tandfonline.com/doi/abs/10.3402/tellusa.v2i4.8607, ogled 3. marca 2022.
- [7] N. Ghofraniha, I. Viola, F. Di Maria, G. Barbarella, G. Gigli, L. Leuzzi in C. Conti, *Experimental evidence of replica symmetry breaking in random lasers*, *Nature Commun.* **6** (2015), 6058.
- [8] E. Gold, *Vilhelm Friman Koren Bjerknæs 1862–1985*, Obituary Notices of Fellows of the Royal Society **7** (20): 302–326. doi:10.1098/rsbm.1951.0002, 1951, dostopno na royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsbm.1951.0002, ogled 3. marec 2022.
- [9] K. Hasselmann, *Optimal Fingerprints for the Detection of Time-dependent Climate Change*, *J. of Climate* **6** (1993), 1957–1971, dostopno na [doi.org/10.1175/1520-0442\(1993\)006<1957:OFFTDO>2.0.CO;2](http://doi.org/10.1175/1520-0442(1993)006<1957:OFFTDO>2.0.CO;2), ogled 3. marca 2022.
- [10] K. Hasselmann, *Stochastic climate models Part I. Theory*, *Tellus* **28** (1976), 473–485, DOI: 10.3402/tellusa.v28i6.11316, dostopno na doi.org/10.3402/tellusa.v28i6.11316, ogled 3. marca 2022.
- [11] G. C. Hegerl, K. Hasselmann, U. Cubasch, J. F. B. Mitchell, E. Roeckner, R. Voss in J. Waszkewitz, *Multi-fingerprint detection and attribution analysis of greenhouse gas, greenhouse gas-plus-aerosol and solar forced climate change*, *Climate Dynamics* **13** (1993), 613–634, dostopno na link.springer.com/article/10.1007/s003820050186, ogled 3. marca 2022.
- [12] G. Hegerl, F. Zwiers in C. Tebaldi, *Patterns of change: whose fingerprint is seen in global warming?*, *Environ. Res. Lett.* **6** (2011), 044025 (6pp) doi:10.1088/1748-9326/6/4/044025, dostopno na iopscience.iop.org/article/10.1088/1748-9326/6/4/044025, ogled 3. marca 2022.
- [13] T. J. Johns et al. (25 avtorjev), *The new Hadley Centre Climate Model (HAD-GEM1)*, Evaluation of coupled simulations, *J. of Climate* **19:7** (2006), 1327–1353, DOI:10.1175/JCLI3712.1, dostopno na journals.ametsoc.org/view/journals/clim/19/7/jcli3712.1.xml, ogled 3. marca 2022.
- [14] M. Kardar, G. Parisi in Y-C. Zhang, *Dynamical scaling of growing interfaces*, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986), 889.
- [15] M. Ljubotina, M. Žnidarič in T. Prosen, *Kardar-Parisi-Zhang physics in the quantum Heisenberg magnet*, *Phys. Rev. Lett.* **122** (2019), 210602.
- [16] E. N. Lorenz, *Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues*, *J. Atmos. Sci.* **26** (1969), 636–646, dostopno na [doi.org/10.1175/1520-0469\(1969\)26<636:APARBN>2.0.CO;2](http://doi.org/10.1175/1520-0469(1969)26<636:APARBN>2.0.CO;2), ogled 3. marca 2022.
- [17] P. Lynch, *The emergence of numerical weather prediction*, Richardson’s Dream, Cambridge Univ. Press, 2006, xi+280 pp.
- [18] P. Lynch, *The ENIAC Forecasts: A re-creation*, *Bull. Am. Meteorol. Soc.* **89** (2008), 45–56, DOI: doi.org/10.1175/BAMS-89-1-45, ogled 3. marca 2022.
- [19] S. Manabe in K. Bryan, *Climate calculations with a combined ocean-atmosphere model*, *J. Atmos. Sci.* **26** (1969), 786–789.
- [20] S. Manabe, J. Smagorinsky in R. F. Strickler, *Simulated climatology of general circulation with a hydrologic cycle*, *Monthly Weather Rev.* **93** (1965), 769–798.
- [21] S. Manabe in R. T. Wetherald, *The effects of doubling the CO₂ concentration on the climate of a general circulation model*, *J. Atmos. Sci.* **32** (1975), 3–5, dostopno na [doi.org/10.1175/1520-0469\(1975\)032<0003:TEODTC>2.0.CO;2](http://doi.org/10.1175/1520-0469(1975)032<0003:TEODTC>2.0.CO;2), ogled 3. marca 2022.

Nobelova nagrada 2021 za fiziko

- [22] S. Manabe in R. Wetherald, *Thermal equilibrium of the atmosphere with a given distribution of relative humidity*, J. Atmos. Sci. **24** (1967), 241–259.
- [23] G. Parisi, *Infinite number of order parameters for spin-glasses*, Phys. Rev. Lett. **43** (1979), 1754.
- [24] G. Parisi, *Toward a mean field theory for spin glasses*, Phys. Lett. **73** (1979), 203.
- [25] N. A. Phillips, *The general circulation of the atmosphere: A numerical experiment*, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. **82** (1956), 123–164, dostopno na doi.org/10.1002/qj.49708235202, ogled 3. marca 2022.
- [26] J. Rakovec in T. Vrhovec, *Osnove meteorologije za naravoslovce in tehnike*, 3. izdaja, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2017.
- [27] L. F. Richardson, *Weather prediction by numerical process*, Cambridge Univ. Press, xii+240 pp, 1922, dostopno na archive.org/details/weatherpredictio00richrich/, ogled 3. marca 2022.
- [28] J. Smagorinsky, S. Manabe in J. L. Holloway, *Numerical results from a nine-level general circulation model of the atmosphere*, Monthly Weather Rev. **93** (1965), 727–768, dostopno na [doi.org/10.1175/1520-0493\(1965\)093<0727:NRFANL>2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1965)093<0727:NRFANL>2.3.CO;2), ogled 3. marca 2022.
- [29] M. Talagrand, *The Parisi Formula*, Annals of Mathematics **163** (2006), 221.
- [30] P. Thompson, *Interview of Philip D. Thompson*, 1987, dostopno na opensky.ucar.edu/islandora/object/archives%3A7649/datastream/OBJ/view, ogled 3. marca 2022.
- [31] J. Tyndall, *On radiation through the earth's atmosphere*, javno predavanje, 1863, dostopno na www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14786446308643443, ogled 3. marca 2022.
- [32] *Climate model*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Climate_model, ogled 3. marca 2022.
- [33] *Eady Model*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Eady_Model, ogled 3. marca 2022.
- [34] *Edward Norton Lorenz*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Edward_Norton_Lorenz, ogled 3. marca 2022.
- [35] *Giorgio Parisi*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Giorgio_Parisi, ogled 3. marca 2022.
- [36] *Intervju s Hasselmannom v Die Welt* (1976), omenjen na domači strani Max-Planck-Gesellschaft, dostopno na www.mpg.de/17673145/klaus-hasselmann-nobel-prize-physics-2021-background, ogled 3. marca 2022.
- [37] *Irish Times 2012: How Joseph Fourier discovered the greenhouse effect*, dostopno na www.irishtimes.com/news/science/how-joseph-fourier-discovered-the-greenhouse-effect-1.3824189, ogled 3. marca 2022.
- [38] *Klaus Hasselmann*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Klaus_Hasselmann, ogled 3. marca 2022.
- [39] *Svante Arrhenius*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Svante_Arrhenius, ogled 3. marca 2022.
- [40] *Syukuro Manabe*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Syukuro_Manabe, ogled 3. marca 2022.

NOVE KNJIGE

A. Alarcón, F. Forstnerič in F. J. López, Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2021, 430 strani.

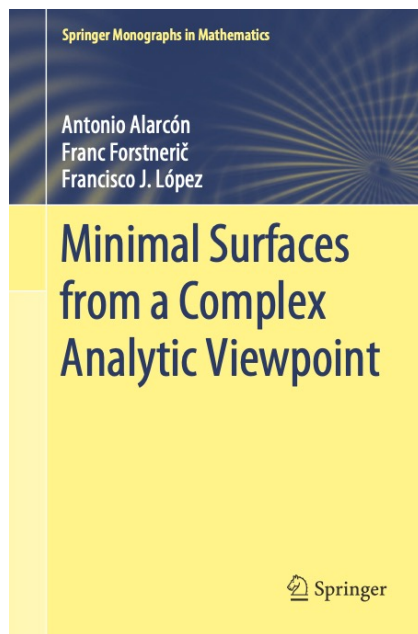
Teorija minimalnih ploskev je eno klasičnih področij matematike, ki se ukvarja s študijem ploskev z lokalno najmanjšo površino. Začetnik moderne teorije je bil Leonhard Euler, ki je leta 1744 dokazal, da sta edini taki rotacijsko invariantni ploskvi v \mathbb{R}^3 ravnina in katenoida, to je ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem vijačnice okoli abscisne osi.

V moderni teoriji minimalnih ploskev se uporabljajo metode iz diferencialne geometrije, geometrijske teorije mere, parcialnih diferencialnih enačb in kompleksne analize. Metode kompleksne analize ene spremenljivke so bile s pridom uporabljene že v klasični teoriji pri študiju ploskev v \mathbb{R}^3 : Weierstrassova reprezentacijska formula za primeren par meromorfne in holomorfne funkcije lokalno opiše vse minimalne ploskve.

V predstavljeni monografiji pa avtorji predstavijo prispevek teorije Oka k študiju minimalnih ploskev. Gre za homotopski princip v kompleksni analizi, ki poda rešljivost analitičnega nelinearnega problema, kadar ni topoloških ovir. Avtorji so v zadnjih desetih letih uporabili teorijo Oka, konveksno integracijo in metodo sprejev, ki ju je uvedel Mikhail Gromov, ter z njihovo pomočjo rešili precej odprtih problemov v teoriji minimalnih ploskev.

Monografija je namenjena ekspertom s področja diferencialne geometrije in kompleksne analize, pa tudi doktorskim študentom in raziskovalcem na sorodnih področjih. Napisana je zelo strukturirano, njeni avtorji so znani po odlični razlagi. Dokazi so ponazorjeni z ilustracijami, ki olajšajo razumevanje tehnično zelo zapletenih konstrukcij. Knjiga je opremljena s številnimi avtorskimi prikazi klasičnih primerov minimalnih ploskev.

Prvi dve poglavji sta uvodnega značaja. V prvem so predstavljene osnove realnih in kompleksnih mnogoterosti, s posebnim poudarkom na enorazsežnih kompleksnih mnogoterostih – Riemannovih ploskvah, na komple-



ksni aproksimacijski teoriji in teoriji Oka. Drugo poglavje je pregled osnov teorije minimalnih ploskev. Povezava med obema področjema je posledica tega, da je realni del holomorfne funkcije harmonična funkcija in obratno, vsaka harmonična funkcija, ki ima ničelne periode, je realni del holomorfne funkcije. Minimalne ploskve so namreč parametrizirane s konformnimi harmoničnimi preslikavami. Naj bo \mathcal{A} ničelna kvadrika

$$\mathcal{A} = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = 0\}.$$

Pravimo, da je holomorfna imerzija $f: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ iz odprte Riemannove ploskve M holomorfna ničelna krivulja, če v vsaki točki njen odvod leži v ničelni kvadriki. Realni deli holomorfnih ničelnih krivulj so konformne minimalne imerzije. Avtorji so ugotovili, da je prebodena ničelna kvadrika $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ mnogoterost Oka, kar jim je omogočilo uporabo homotopskega principa.

V nadaljevanju avtorji predstavijo rezultate, ki so jih razvili s svojimi sodelavci in študenti v zadnjih desetih letih: v tretjem poglavju so izpeljani aproksimacijski in interpolacijski izreki za konformne minimalne imerzije. V četrtem poglavju se posvetijo minimalnim ploskvam s končno totalno Gaussovo ukrivljenostjo. V petem poglavju se osredotočijo na Gaussovo preslikavo minimalne ploskve, ki vsaki točki na minimalni ploskvi v \mathbb{R}^3 priredi normalni vektor.

Riemann-Hilbertov robni problem in njegova uporaba pri konstrukciji minimalnih in holomorfnih ničelnih krivulj je osrednja tema šestega poglavja. Njegova aproksimativna rešitev omogoča konstrukcije z natančno kontrolo lege roba. Pravimo, da je ploskev M v \mathbb{R}^n kompletna, če je dolžina vsake poti v M , ki zapusti katero koli kompaktno množico v M , neskončna. Tema sedmega poglavja je problem Calabi-Yau v teoriji minimalnih ploskev: to je vprašanje, katere odprte Riemannove ploskve določajo kompleksno strukturo kompletnih omejenih minimalnih ploskev v \mathbb{R}^3 . *Končna Riemannova ploskev* je kompaktna Riemannova ploskev z robom, ki je sestavljen iz končnega števila gladkih sklenjenih krivulj. V osmem poglavju avtorji z uporabo Riemann-Hilbertove metode konstruirajo kompletne prave konformne minimalne imerzije iz končnih Riemannovih ploskev v minimalno konveksne domene v \mathbb{R}^n . Minimalno konveksne domene so posplošitev konveksnih domen in so definirane s primernimi funkcijami izžerpanja. Delijo si nekatere lastnosti s psevdokonveksnimi domenami v \mathbb{C}^n . V devetem poglavju se posvetijo študiju minimalnih ogrinjač z uporabo metod kompleksne in funkcionalne analize.

Barbara Drinovec Drnovšek

Osemindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Zaradi razmer je bilo tekmovanje, ki je v preteklosti pogosto potekalo v Blagoevgradu v Bolgariji, lani izvedeno po vsem svetu. Med 2. in 8. avgustom so študenti iz celega sveta tekmovali, vsak v svoji državi, nekateri kar doma. Iz Slovenije sta se tekmovanja udeležili dve ekipi. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so zastopali Luka Horjak iz prvega letnika, Matevž Mišičič iz drugega letnika, Andraž Maier in Žan Bajuk iz tretjega letnika ter Daniel Vitas in Tjaž Silovšek, ki matematiko študirata četrto leto. Fakulteto za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem pa so zastopali študenti Dorotea Redžepi in Lazar Marković iz prvega letnika, Ajla Šehović, Milan Milivojčević in Todor Antić iz drugega letnika in Besfort Shala, četrto leto študija. Pravila tekmovanja namreč določajo, da lahko tekmujejo vsi, ki niso starejši od 23 let ter so vključeni v študij največ štiri leta. Prilagojena izvedba je dovoljevala nadzor bodisi fizično v predavalnici bodisi prek ustreznega nadzornega računalniškega sistema. Na FMF smo se odločili za fizično prisotnost, tako da je vseh šest tekmovalcev pisalo v predavalnici, na Famnitru pa so študentom omogočili, da so pisali doma, nadzor pa je bil prek Zooma.

Vodji ekip sva bila Gregor Šega in Slobodan Filipovski.

V dvodnevnem reševanju osmih nalog se je pomerilo 589 študentov, kar je največ do sedaj. Razvrščeni so bili v 113 ekip, med katerimi je bila najbolj



Slika 1. Študenti Fakultete za matematiko in fiziko prvi dan tekmovanja.



Slika 2. Študenti FMF na začetku drugega tekmovalnega dne.

številna ekipa študentov brez ekipe. Običajno namreč univerzitetno ekipo sestavlja od tri do šest študentov, se pa na tekmovanje lahko prijavi vsak študent, tudi če njegova univerza ne sodeluje. Letos je bilo takih študentov kar precej, skoraj sto, in ker mora tudi za njih kdo poskrbeti (nadzor, pritožbe), so bili organizirani v ekipo. V ekipni razvrstitvi so univerze rangirane po formuli »vsota najboljših treh tekmovalcev plus povprečje vseh«. Kot zanimivost, ekipa študentov brez ekipe je imela tudi (vsaj) tri zelo dobre tekmovalce, tako da je po omenjeni formuli, kljub kar nekaj študentom z ničlo (in pravzaprav številnim, ki so povprečje zniževali), dosegla celo trinajsto mesto.

Letos so naši tekmovalci dosegli izjemen uspeh. Luka Horjak in Daniel Vitas sta dobila prvo nagrado, vsi drugi tekmovalci s FMF, torej Matevž Mišičič, Andraž Maier, Tjaž Silovšek in Žan Bajuk ter Besfort Shala so dobili drugo nagrado, Todor Antić in Dorotea Redžepi pa pohvalo.

Ekipno smo dosegli devetnajsto (ekipa Fakultete za matematiko in fiziko) ter štiriinosemdeseto mesto (ekipa Famnit).

Ker tekmovanje ni potekalo na eni lokaciji, je ves spremljevalni družabni program odpadel. Tekmovanje na ta način izgubi precej svojega značaja, po drugi strani pa je tudi vpliv motečih elementov zmanjšan. V dneh, ko so študenti reševali naloge, se je temperatura v Blagoevgradu dvignila do 38°C , kar v kombinaciji z neklimatiziranimi prostori lahko pomeni težavo. Tudi dejstvo, da so ekipe začenjale pisati ob različnih urah, ni bil problem, vsaj zaznaven ne. Na splošno je bila letos odgovornost študentov na visokem nivoju, kar dokazuje nič diskvalificiranih (lani jih je bilo nekaj, ob podobnem



Slika 3. Študenti FMF med drugim tekmovalnim dnevom.

režimu). Je pa bivanje v različnih časovnih pasovih bilo problem za komisijo, ko se je bilo treba uskladiti za ocene z ocenjevalcema z drugih strani planeta – vedno jih je kar nekaj spalo (tako smo morda dobili še praktičen dokaz, da Zemlja res ni ploščata).

Otvoritvena slovesnost ter končna podelitev nagrad sta potekali po spletu, posnetka lahko najdete na strani tekmovanja (www.imc-math.org.uk) oziroma na YouTubeu. To pa je bilo tudi vse, kar se tiče družabnega življenja. Namesto da bi študenti v pričakovanju rezultatov spoznavali druge tekmovalce, igrali nogomet, družabne igre, morda šli na bazen ali plezali po okoliških hribčkih (kar običajno počnejo v Blagoevgradu), so na rezultate čakali doma. In tokrat so morali čakati kar dolgo, saj so bili tudi člani komisije doma in vpeti v normalen ritem življenja, namesto da bi cele dneve in noči posvetili hitremu ocenjevanju izdelkov. Prav tako se nismo mogli izogniti za to leto običajnim dogodkom. Ena ekipa, ki je imela nadzor na daljavo, je pisanje tik pred začetkom premaknila z dopoldneva na popoldan, ker je pri enem od tekmovalcev prišlo do pretrganja električnega kabla. Eden izmed ocenjevalcev je kar naenkrat postal neodziven, naknadno smo ugotovili, da zaradi močne reakcije po cepljenju. In seveda, sredi ocenjevanja so izdelki postali nedostopni, ker smo presegli dovoljen dnevni promet podatkov na strežniku, kar je onemogočilo oddajo prek obrazca tudi nekaterim študentom (med drugim tudi prej omenjeni ekipi).

Oglejmo si še štiri naloge s tekmovanja ter nekaj njihovih rešitev. Priporočam, da poskušate naloge najprej rešiti sami, nato pa pogledate namige in rešitve.



Slika 4. Ekipa Fakultete za matematiko in fiziko po zaključku drugega tekmovalnega dne.

Pogosto so naloge sestavljene zelo dobro, tako da preverjajo razumevanje snovi in koncepte reševanja matematičnih nalog, oziroma že razumevanje, kaj navodilo naloge sploh pomeni. Taka je bila tudi najlažja naloga obeh dni.

Naloga 1. Naj bo A realna $n \times n$ matrika, za katero velja $A^3 = 0$.

(a) Dokazite, da enačbo

$$X + AX + XA^2 = A$$

reši enolična realna $n \times n$ matrika X .

(b) Izrazite X z A .

Rešitev. Navajeni smo, da se enoličnost dokazuje na način, da predpostavimo dve rešitvi ter pokažemo, da sta enaki. V tem primeru naj torej poleg matrike X enačbo reši tudi matrika Y . No, ta pot nas ne privede skoraj nikamor. Tako se začnemo igrati in osnovno enačbo množimo z različnimi potencami matrike A , včasih z leve, včasih z desne. Tako dobimo recimo

$$A^2(X + AX + XA^2)A^2 = A^2XA^2 + A^3XA^2 + A^2XA^4 = A^2XA^2.$$

Upoštevamo seveda, da je $A^3 = 0$ in zato tudi $A^4 = A^5 = 0$. Zato je desna stran enačbe enaka $A^2 \cdot A \cdot A^2 = A^5 = 0$, torej smo dobili $A^2XA^2 = 0$.

Podobno dobimo

$$\begin{aligned} A^2X &= A^2(X + AX + XA^2) = A^3 = 0 \\ AXA &= A(X + AX + XA^2)A = A^3 = 0 \\ XA^2 &= (X + AX + XA^2)A^2 = A^3 = 0 \\ AX &= A(X + AX + XA^2) = A^2. \end{aligned}$$

Sledi

$$X = A - AX - XA^2 = A - A^2.$$

Videti je, kot da smo rešili točko (b) naloge, saj imamo X izražen z A . Vsaj tako je menilo kar precej študentov. Pravzaprav pa smo rešili točko (a), namreč, predpostavili smo, da obstaja X , ki reši enačbo, in ugotovili, da bi moral biti oblike $X = A - A^2$. Če torej rešitev obstaja, je ena sama. Za točko (b) moramo le še preveriti, da tako izbran X res ustreza enačbi, kar enostavno vidimo, saj je res

$$(A - A^2) + A(A - A^2) + (A - A^2)A^2 = A.$$

Druga rešitev. Sicer podobna, a le malo drugačna rešitev, najprej preoblikuje osnovno enačbo:

$$X = A - AX - XA^2.$$

Sedaj tako izražen X vstavimo v desno stran enačbe, upoštevamo $A^3 = 0$ in nadaljujemo:

$$\begin{aligned} X &= A - AX - XA^2 \\ &= A - A(A - AX - XA^2) - (A - AX - XA^2)A^2 \\ &= A - (A^2 - A^2X - AXA^2) - (A^3 - AXA^2 - XA^4) \\ &= A - A^2 + A^2X + 2AXA^2 \\ &= A - A^2 + A^2(A - AX - XA^2) + 2A(A - AX - XA^2)A^2 \\ &= A - A^2 + (A^3 - A^3X - A^2XA^2) + 2(A^4 - A^2XA^2 - AXA^4) \\ &= A - A^2 - 3A^2XA^2 \\ &= A - A^2 - 3A^2(A - AX - XA^2)A^2 \\ &= A - A^2 - 3(A^5 - A^3XA^2 - A^2XA^4) \\ &= A - A^2. \end{aligned}$$

Tudi v tem primeru moramo preveriti, da je tako izražen X res rešitev osnovne enačbe.

Tretja rešitev. Opazimo, da velja $(I - A + A^2) \cdot (I + A) = I$. Če osnovno enačbo pomnožimo z $(I - A + A^2)$ z leve, dobimo

$$X + (I - A + A^2)XA^2 = (I - A + A^2)A = A - A^2. \quad (1)$$

Od tod (z množenjem z A^2 z desne) dobimo $XA^2 = 0$, kar enačbo (1) spremeni v $X = A - A^2$. Spet moramo preveriti, da je to res rešitev.

Kombinatorika in verjetnost sta eni izmed področij, iz katerih so lahko naloge na tem tekmovanju, vendar pa se redko pojavijo. Tokrat je bila v reševanje ponujena naslednja verjetnostna naloga.

Naloga 2. Naj bosta n in k naravni števili in naj bo a poljubno nenegativno celo število. Naključno izberemo k -elementno podmnožico X množice $\{1, 2, \dots, k + a\}$ tako, da je vsaka k -elementna podmnožica izbrana enako verjetno (torej jo izberemo enakomerno), in podobno (spet enakomerno), neodvisno od izbrane podmnožice X , naključno izberemo n -elementno podmnožico Y množice $\{1, \dots, k + n + a\}$.

Dokažite, da je verjetnost

$$P(\min(Y) > \max(X))$$

neodvisna od izbrane vrednosti parametra a .

Rešitev. Najprej opazimo, da je število vseh možnih izbir podmnožic (X, Y) enako $\binom{k+a}{k} \cdot \binom{k+n+a}{n}$.

Če želimo, da je $\min(Y) > \max(X)$, izberemo $n+k$ števil izmed $n+k+a$, k manjših števil razglasimo za množico X in n večjih za Y . Torej je ugodnih izbir za podmnožici X in Y $\binom{n+k+a}{n+k}$. Tako je iskana verjetnost enaka

$$\frac{\binom{n+k+a}{n+k}}{\binom{k+a}{k} \cdot \binom{n+k+a}{n}} = \frac{1}{\binom{n+k}{n}}$$

(preverimo tako, da binomske koeficiente razpišemo in pokrajšamo dobljene ulomke).

Tako izračunana verjetnost je neodvisna od a .

Druga rešitev. Če se nekaj da rešiti enostavno, se zagotovo da tudi zakomplicirati. Tako je veliko študentov razmišljalo zaporedno: najprej izberemo števila v X , kakorkoli že, nato pa števila v Y izbiramo izmed tistih, ki so večja od največjega v X . Torej moramo ločiti primere, koliko je največje število v množici X . Če je to število m , potem za X (poleg njega)

izberemo še $k - 1$ števil izmed števil od 1 do $m - 1$, za Y pa izberemo n števil izmed $m + 1, m + 2, \dots, k + n + a$. Torej imamo $\binom{m-1}{k-1} \cdot \binom{k+n+a-m}{n}$ ugodnih izbir za X in Y , pri katerih je največje število v X enako m . Da dobimo vse možne ugodne izbire, samo še seštejemo po m :

$$\sum_{m=k}^{k+a} \binom{m-1}{k-1} \cdot \binom{k+n+a-m}{n}.$$

Kombinatorično že znamo sešteti to vsoto, saj preštevamo vse $n + k$ velike podmnožice množice z $k + n + a$ elementi (pri čemer v vsoti ločimo, katero vrednost zavzame k -to število). Vendar bi v tem primeru razmislek naredili kot v prvi rešitvi. Alternativa je, da se vsote lotimo računsko. Tako sedaj sledijo trije načini, kako sešteti to vsoto. Vse tri so uporabili študenti. Vsi trije so napačni. Pozoren bralec bo napake zagotovo odkril sam.

Prvi način. Seveda lahko preverimo, kaj se zgodi pri $a = 0$. Vsota je enaka le enemu členu, torej

$$\sum_{m=k}^{k+a} \binom{m-1}{k-1} \cdot \binom{k+n+a-m}{n} = \binom{k-1}{k-1} \cdot \binom{k+n-k}{n} = 1,$$

kar pomeni, da je

$$P(\min(Y) > \max(X)) = \frac{1}{\binom{k+0}{k} \cdot \binom{n+k+0}{n}} = \frac{1}{\binom{n+k}{n}}$$

Ker v rezultatu ne nastopa a , je iskana verjetnost neodvisna od a .

Drugi način. Če nekaj velja za vse a , je možno poskusiti tudi indukcijo. Poskusov na to temo je bilo veliko. Vsem je skupno to, da izraz za $a + 1$ preoblikujejo (recimo, uporabijo Pascalovo enakost za binomski koeficient), nato pa bodisi nekaj spregledajo bodisi nekaj opazijo, kar ne drži in kar jih pripelje do zelenega rezultata. Podrobnosti spustimo, podoben sistem reševanja si oglejmo v naslednjem načinu.

Tretji način. Ta je še posebej inovativen. Najprej naredimo malce drugačen razmislek, kako izberemo obe ugodni množici. Izbrali bomo k števil izmed prvih m ter n števil izmed zadnjih $k + n + a - m$, torej je treba sešteti

$$\sum_{m=k}^{k+a} \binom{m}{k} \cdot \binom{k+n+a-m}{n}.$$

Številni se spomnimo enakosti

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r},$$

ki je (pri verjetnosti) povezana s hipergeometrijsko porazdelitvijo, ima pa tudi posebno ime: Vandermondeova enakost (uporabljene črke so nerodne, vendar je to točno oblika, kot je na Wikipediji). Namesto n raje pišimo $t - m$ in seštevajmo po j , da dobimo

$$\sum_{j=0}^r \binom{m}{j} \binom{t-m}{r-j} = \binom{t}{r},$$

sedaj pa lahko preimenujemo spremenljivke in dobimo ($m \rightarrow k + j$, $r \rightarrow a$, $t \rightarrow k + n + a$, še vedno seštevamo po j):

$$\sum_{j=0}^a \binom{k+j}{j} \binom{k+n+a-(k+j)}{a-j} = \binom{k+n+a}{a},$$

torej smo dobili vsoto

$$\sum_{j=0}^a \binom{k+j}{j} \binom{n+a-j}{a-j} = \binom{k+n+a}{a}.$$

Za novo spremenljivko $m = j + k$ dobimo

$$\sum_{m=k}^{k+a} \binom{m}{m-k} \binom{n+a-m+k}{a-m+k} = \binom{k+n+a}{a}.$$

Oziroma

$$\sum_{m=k}^{k+a} \binom{m}{k} \binom{n+a-m+k}{n} = \binom{k+n+a}{a}.$$

Spet smo pravilno rešili nalogo: ko pokrajšamo vse člene, je končni rezultat neodvisen od a .

Zanimivo, kako se pogosto dve napaki ravno pokrajšata, da dobimo pravi rezultat.

Še četrti način. S tem je bilo sploh veliko problemov pri ocenjevanju. Namreč, zelo veliko študentov je zapisalo, da je

$$\sum_{m=k}^{k+a} \binom{m-1}{k-1} \cdot \binom{k+n+a-m}{n} = \binom{k+n+a}{a}$$

po znani formuli. Kateri, niso zapisali. Komisija se je strinjala, da so verjetno nekateri študenti res že slišali za ustrezno enakost (predložen je bil celo

učbenik kombinatorike, kjer je ustrezna enačba dokazana na sedmi strani, pred Vandermondovo). Kako ločiti med tistimi, ki to enakost poznajo, in tistimi, ki je ne, je ostalo neodgovorjeno vprašanje. Tako pri vsej objektivnosti ocenjevanja s tremi ocenjevalci vsakega izdelka še vedno ostaja subjektivni del.

Naslednja naloga išče dobra zaporedja.

Naloga 3. Rečemo, da je pozitivno realno število d *dobro*, če obstaja zaporedje $a_1, a_2, a_3, \dots \in (0, d)$, tako da za vsak n točke a_1, \dots, a_n razdelijo interval $[0, d]$ na podintervale dolžine največ $1/n$. Določite

$$\sup \left\{ d \mid d \text{ je dobro} \right\}.$$

Rešitev. Naj bo $d^* = \sup\{d \mid d \text{ je dobro}\}$. Pokazali bomo, da je $d^* = \ln(2) \doteq 0,693$ (kar je recimo več kot $\frac{1}{2}$, kar je kot zgornjo mejo našlo kar nekaj tekmovalcev).

(a) $d^* \leq \ln 2$:

Naj bo d dobro število in naj bo a_1, a_2, \dots ustrezno zaporedje za to število. Vemo, da vsako končno zaporedje a_1, \dots, a_n razdeli interval $[0, d]$ na $n + 1$ delov z dolžino največ $1/n$. Naj bodo $0 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_{n+1}$ dolžine teh intervalov. Za vsak $k = 1, \dots, n$ velja, da ko dodamo naslednjih k členov zaporedja, torej a_{n+1}, \dots, a_{n+k} , vsaj $n + 1 - k$ intervalov ostane nespremenjenih in imajo torej nespremenjene dolžine. Torej mora veljati $\ell_{n+1-k} \leq \frac{1}{n+k}$, zato pa je

$$d = \ell_1 + \dots + \ell_{n+1} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \dots + \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Ko pošljemo $n \rightarrow \infty$, desna stran konvergira k $\ln(2)$, od koder dobimo željeno neenakost $d \leq \ln(2)$.

(b) $d^* \geq \ln 2$:

Najti moramo zaporedje a_i , ki ustreza pogoju o delitvi intervala $(0, d)$ in za katerega je $\sup a_i = \ln 2$. Opazimo

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \ln 2n - \ln n = \sum_{i=1}^n (\ln(n+i) - \ln(n+i-1)) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{n+i-1} \right). \end{aligned}$$

Ideja je, da člene vsote enačimo z dolžinami intervalov, ki jih dobimo, če v interval $(0, \ln 2)$ dodamo $n - 1$ točk. Seveda velja tudi, da je največja dolžina enaka $\ln(1 + 1/n)$, kar je manj od $1/n$.

Ko v interval dodamo še eno točko, razbijemo najdaljši interval na dva manjša kosa, tako da v vsoti člen $\ln(1 + 1/n)$ nadomestimo z vsoto $\ln(1 + 1/(2n))$ in $\ln(1 + 1/(2n + 1))$, saj je

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n + 1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Tako dobimo postopek dodajanja točk. Za $n = 2$ dobimo prvo točko, $a_1 = \ln \frac{3}{2}$ in interval $(0, \ln 2)$ razpade na dva intervala, $(0, \ln \frac{3}{2})$ in $(\ln \frac{3}{2}, \ln 2)$. Vzamemo večjega, vanj dodamo točko tako, da se interval dolžine $\ln \frac{3}{2}$ razbije na dva kosa, dolga $\ln \frac{5}{4}$ in $\ln \frac{6}{5}$, torej je $a_2 = \ln \frac{5}{4}$. Nato interval dolžine $\ln \frac{4}{3}$ razbijemo na dva z dolžinama $\ln \frac{7}{6}$ in $\ln \frac{8}{7}$, tako je recimo $a_3 = \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{7}{6} = \ln \frac{7}{4}$. Na isti način dobimo $a_4 = \ln \frac{9}{8}$, $a_5 = \ln \frac{11}{8}$, $a_6 = \ln \frac{13}{8}$, $a_7 = \ln \frac{15}{8}$, $a_8 = \ln \frac{17}{16}, \dots$

Za konec pa najlepša naloga. Zakaj najlepša? Recimo, ker je kratka, z enostavno formulacijo, ki jo lahko razume tudi marsikateri nematematik:

Naloga 4. Koliko največ enotskih vektorjev lahko izberemo v \mathbb{R}^n , da bosta med poljubnimi tremi izmed njih vsaj dva pravokotna?

Kot informacija: z nalogo je povezan Paul Erdős.

Namigi. Rešitev je seveda $2n$. Izberemo lahko dve različni ortonormirani bazi, vsaka ima n vektorjev, in ko izberemo tri, sta zagotovo dva iz iste baze in torej pravokotna. Naloga je torej pokazati, da ne moremo imeti $2n + 1$ takih vektorjev. Ko pogledamo Gramovo matriko teh vektorjev, ugotovimo, da je z njo nekaj narobe. Kaj točno, lahko poskusite premisliti sami.

Še informacija: na tekmovanju je bil dosežen povprečen rezultat pri prvi nalogi 6,5, pri drugi 4,7, pri tretji 1,1 in pri četrti 0,04 točke, od 10 možnih. Zmagovalec je imel 70 točk od 80 možnih, pri četrti nalogi je dobil 0 točk.

Kogar zanima uradna rešitev zadnje naloge ali pa bi se rad poskusil v reševanju še kakšne naloge s tekmovanja, si jih lahko ogleda na prej omenjeni internetni strani tekmovanja www.imc-math.org.uk.

28. tekmovanje je bilo kar se tiče tekmovalnega uspeha za naše študente res popolno, kot je 28 popolno število. Vseeno na podoben uspeh upamo prej kot čez 468 let.

Gregor Šega

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 2022

Letnik 69, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Ofiurida ali kačjerepnica (Marko Razpet in Nada Razpet)	1–14
Nobelova nagrada 2021 za fiziko (Jože Rakovec in Tomaž Prosen) ...	15–29
Nove knjige	
A. Alarcón, F. Forstnerič in F. J. López, Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint (Barbara Drinovec Drnovšek)	30–31
Vesti	
Osemindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Gregor Šega)	32–III

CONTENTS

Articles	Pages
Ophiuride (Marko Razpet and Nada Razpet)	1–14
Nobel Prize 2021 in Physics (Jože Rakovec and Tomaž Prosen)	15–29
New books	30–31
News	32–III

Na naslovnici: Izrazit 22 stopinjski halo s parhelijem in tangentim lokom, ki je nastal na zgornjem sloju nizkih oblakov pod Krvavcem. (Foto: Janez Bonča)