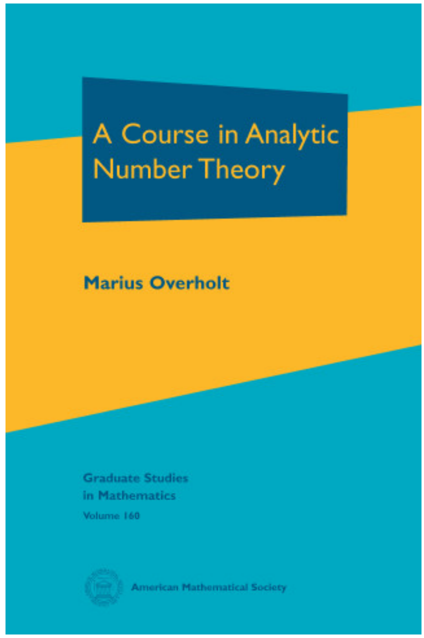
Marius Overholt: A Course in Analytic Number Theory, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014, 371 strani.



Učbenik je namenjen študentom višjih letnikov, ki želijo spoznati osnovne metode analitične teorije števil. Avtor v uvodu pravi, da knjiga ne zahteva posebnega predznanja, razen poznavanja osnov kompleksne analize, algebre in linearne algebre. Vsako poglavje zaokrožijo vaje oziroma naloge ter zelo podrobne, zanimive in poučne zgodovinske opombe in reference na knjige in članke, v katerih so predstavljene teme obravnavane podrobneje.

Analitična teorija števil se v glavnem posveča *aproksimativnemu preštevanju* objektov iz teorije števil, kot so npr. praštevila, delitelji, rešitve diofantskih enačb, točke mrež znotraj danega območja, razčlenitve celih števil, itd. Vendar njen domet ni omejen le na preštevanje števil, in za nekatere probleme (npr. v *algebraični teoriji števil*) dajo njene metode tudi *eksaktne* rešitve.

Prototip in eden zgodovinsko prvih primerov aproksimativnega preštevanja v teoriji števil je *praštevilski izrek*, ki število $\pi(x)$ praštevil $p \leq x$ aproksimira s t. i. *integralnim logaritmom* $\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\log(u)}$.

Relacijo $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{li(x)} = 1$, ki jo je na podlagi empiričnega opažanja, kako se praštevila vse bolj redčijo v tabeli števil do 1000, okrog 1792 formuliral mladi Gauss, najprej v obliki zakona oziroma hipoteze, da je na intervalih $(x-h, x]$ približno $h/\log(x)$ praštevil, in ki so jo najboljši matematiki s klasičnimi metodami zaman poskušali dokazati več kot sto let, sta leta 1896 neodvisno dokazala Jacques Hadamard in Charles de la Vallée Pousin na temelju idej Bernharda Riemanna, z uporabo kompleksne analize na *Riemannovi zeta funkciji* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, kar je pomenilo prvo veliko zmagoslavje analitične teorije števil.

Na gornjem zgledu lepo vidimo, kako matematika v svojem nastajanju, drugače od poučevanja matematike, ki terja izčiščene definicije, strogost in ekonomičnost, zahteva bujno domišljijo ter kreativen in drzen skok v neznano, tega presežka pa zgolj z asketsko logiko in dedukcijo, ki ostajata v varni domeni znanega, ni mogoče doseči. Seveda pa dokazi pomembnih izrekov poleg dobre začetne ideje, ki raziskovanje pravilno usmeri, praviloma zahtevajo vztrajnost, domiselnost in osredotočenost na cilj v vseh fazah dela; nekateri matematiki zato začenjajo vse svoje dokaze s črkami Q. E. D. – kot opomin, da se v gozdu neštetih možnih poti ne smejo izgubiti, ampak morajo svoje delo kronati z otipljivim rezultatom!

Ker je porazdelitev praštevil eden ključnih problemov v teoriji števil, so matematiki vztrajno iskali in našli še mnoge boljše ocene za funkcijo $\pi(x)$. Tako je npr. v knjigi dokazan rezultat $|\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log(u)}| \leq Cxe^{-c\log^{1/10}(x)}$ za $x \geq x_0$.

V analitični teoriji števil so pomembne tudi ocene velikosti napake pri aproksimaciji $f(x) \backsim g(x)$ neke aritmetične funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ z neko analitično funkcijo $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tipičen tak problem je t. i. *Dirichletov problem deliteljev.* Če označimo število deliteljev naravnega števila n z $d(n)$, potem lahko povprečno število teh deliteljev $\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} d(n)$ aproksimiramo z $\log(x) + 2\gamma - 1$, kjer je $\gamma = 0{,}57772\ldots$ *Euler-Mascheronijeva konstanta.* Kako hitro pri tej aproksimaciji absolutna napaka konvergira k 0, ko gre $x \to \infty$? To je Dirichletov problem deliteljev iz leta 1838, ki ima bogato zgodovino in je še do danes nerešen.

Delitelji in praštevila sodijo v t. i. *multiplikativno teorijo števil.* Metode analitične teorije števil pa so uporabne tudi v t. i. *aditivni teoriji števil*, npr. za dokaz *Waringove domneve* iz leta 1770 (prvi jo je dokazal David Hilbert 1909), da se da vsako naravno število n izraziti kot vsota $n = \sum_{i=1}^{g(k)} a_i^k$ omejenega števila k-tih potenc nenegativnih celih števil a_i, pri čemer je to število $g(k) < \infty$ odvisno od k.

Poglavja so (glede medsebojne odvisnosti) urejena po shemi: $1 \to (2,3)$, $3 \to (4,5), 5 \to (6,7,8), 8 \to (9,10)$ in imajo naslednje naslove oziroma vsebino:

V prvem poglavju z naslovom *Aritmetične funkcije* je najprej opisana metoda Čebiševa, s katero je mogoče dokazati $\pi(x) \backsim \mathrm{li}(x)$, njena začetna ideja pa je zelo preprosta. Ker je po zgoraj omenjenem praštevilskem izreku gostota praštevil do n približno $1/\log(n)$, se pri preštevanju praštevil zdi naravneje vsakemu praštevilu dati utež $\log(p)$ namesto 1. Tako je Čebišev vpeljal uteženo preštevalno funkcijo $\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log(p)$. Ker pa so potence praštevil razmeroma redke, je vpeljal še eno preštevalno funkcijo $\psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log(p)$. Ti dve funkciji sta aproksimativno enaki, z njima pa lahko praštevilski izrek izrazimo v obliki $\psi(x) \backsim x$ oziroma $\vartheta(x) \backsim x$. Za boljšo predstavo o zahtevnosti teh izpeljav povejmo le, da ustrezni dokaz v knjigi zavzema skoraj tri strani!

Z izboljšano verzijo svoje metode je Čebišev našel za funkcijo $\psi(x)$ naslednji meji: $0{,}921 \cdot x \le \psi(x) \le 1,106 \cdot x$ za vse dovolj velike x, in uporabil ti meji za prvi dokaz *Bertrandovega postulata*, ki pravi, da za vsak $x \ge 2$ obstaja najmanj eno praštevilo na intervalu $(x/2, x]$. Ta njegov članek iz leta 1850 velja za začetek študija lokalne porazdelitve praštevil. V knjigi je podan krajši dokaz Bertrandovega postulata iz dveh delov: i) za $2 \le x \le 797$ trditev sledi iz opažanja E. G. H. Landaua, da je v zaporedju praštevil $2, 3, 5, 7, 11, 17, 31, 59, 107, 211, 401, 797$ vsako število manjše od dvakratnika svojega predhodnika; ii) za $x \ge 797$ pa se da (na podlagi Ramanujanove ideje in z veliko računske spretnosti) razliko $\vartheta(x) - \vartheta(x/2)$ omejiti navzdol s funkcijo $f(x) = \frac{\log(2)}{3} - \log(4x) - \frac{3 \log n^2(x)}{2 \log(2)} - 4 \log(2) x^{1/2}$, ki ima za $x \ge 797$ pozitiven odvod $f'(x) > 0$, v točki $x = 797$ pa ima pozitivno vrednost $f(797) = 1{,}2$, torej je $\vartheta(x) - \vartheta(x/2) \ge f(x) > 0$, Q. E. D.

Knjiga pomeni nekaj standardnih orodij, ki se uporabljajo v analitični teoriji števil. Tako npr. dolge račune z neenakostmi zelo poenostavi Bachmannov zapis $f(x) = O(g(x))$, ki pomeni, da obstaja neka konstanta $C > 0$ in neko realno število x_0, da velja $|f(x)| \le Cg(x)$ na intervalu $x \ge x_0$; pri ocenjevanju integralov na intervalu I dostikrat pride prav Hölderjeva neenakost $\int_I |f(x)g(x)| dx \le (\int_I |f(x)|^p dx)^{1/p} (\int_I |g(x)|^q dx)^{1/q}$, kjer je $1 < p, q < \infty$ in $1/p + 1/q = 1$; morda najpogosteje uporabljano orodje v analitični teoriji števil je *parcialna sumacija* (diskretna analogija integracije per partes), katere osnovna verzija je identiteta: $\sum_{m=1}^{n} a_m b_m = b_n \sum_{m=1}^{n} a_m - \sum_{m=1}^{n-1} (b_{m+1} - b_m) \sum_{k=1}^{m} a_k$. Za ocenjevanje uteženih vsot *aritmetičnih funkcij* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ je zelo uporabna formula parcialne sumacije $\sum_{n \le x} f(n)g(n) = F(x)g(x) - \int_1^x F(u)g'(u) du$, kjer je $F(u) = \sum_{n \le x} f(n)$ *sumacijska funkcija* aritmetične funkcije f, g pa je zvezna funkcija z odsekoma zveznim odvodom na $(1, \infty]$.

Kot primer zahtevnejše metode, predstavljene v Overholtovi knjigi, omenimo *metodo normalnega reda* (angl. normal order method) P. Turána, opisano v drugem poglavju knjige. Realna funkcija g je *normalni red* za realno funkcijo f, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja neenakost $-\varepsilon g(n) \leq f(n) - g(n) \leq \varepsilon g(n)$ za $n \leq x$ z največ $o_\varepsilon(x)$ izjemami, kjer je $f(x) = o(g(x))$ Landauova mali-o notacija za $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 0$.

G. H. Hardy in S. A. Ramanujan sta pokazala, da imata funkciji $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ različnih praštevilskih deliteljev števila n in $\Omega(n) = \sum_{p^k|n} 1$ vseh deliteljev števila n obe normalni red $\log(\log(n))$. To je v knjigi dokazano s Turánovo metodo, ki ima tudi verjetnostno interpretacijo. Turánov dokaz pa je odprl polje raziskovanja, ki se imenuje *verjetnostna teorija števil.*

V tretjem poglavju z naslovom *Karakterji in Eulerjevi produkti* je dokazana identiteta $\prod_p \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, ki velja za poljubno nenegativno *multiplikativno* aritmetično funkcijo f, tj. tako, ki ni identično enaka nič in za katero je $f(mn) = f(m)f(n)$, če je le $gcd(m,n) = 1$. Obravnavane so tudi *Dirichletove vrste* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ s koeficienti $a_n \in \mathbb{C}$ in spremenljivko $s \in \mathbb{C}$. Dirichletovo vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ aritmetične funkcije f imamo lahko za *rodovno funkcijo* funkcije f. Podobno kot so formalne potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uporabne v aditivni teoriji števil zaradi lastnosti $z^m z^n = z^{m+n}$ monomov, tako so Dirichletove vrste primerne za multiplikativne probleme zaradi lastnosti $m^{-s}n^{-s} = (mn)^{-s}$ Dirichletovih monomov.

Pomembno vlogo v analitični teoriji števil igrajo tudi ideje iz harmonične analize; ta način je vpeljal Dirichlet okrog 1830. Kot pravi M. Overholt, v harmonični analizi študirajo aproksimacije ali celo natančne reprezentacije funkcij s končnimi linearnimi kombinacijami $f(x) = c_1b_1(x) + c_2b_2(x) + \cdots + c_Nb_N(x)$, ali pa z neskončnimi vrstami ali integrali, kjer si vse bazne funkcije $b_n(x)$ delijo neko skupno simetrijsko lastnost. Le-ta je navadno določena z delovanjem neke grupe na prostoru, na katerem so funkcije definirane. Najbolj znan primer so klasične Fourierove vrste $f(x) \backsim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e(nx)$, kjer so vse bazne funkcije $e(nx)$, dane z $e(x) = e^{2\pi ix}$ periodične s periodo 1.

Najpreprostejši primer uporabe harmonične analize v analitični teoriji števil se nanaša na tiste aritmetične funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, ki so periodične s periodo q. Le-te so izomorfne prostoru kompleksnih funkcij na ciklični grupi $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_q$. V knjigi je kot primer izpeljan Fourierov razvoj Legendrovega simbola $(\frac{n}{p}) = p^{-1/2} \sum_{k=1}^{p} \frac{\sqrt{p}}{\tau_p} (\frac{k}{p}) e(kn/p)$. Posplošitev teh metod naravno vodi do zelo uporabnega koncepta *reprezentacij grup.* Če namreč neko abstraktno grupo G, o kateri sicer ne vemo veliko, homomorfno preslikamo npr. v neko grupo matrik, lahko z metodami linearne algebre študiramo prvotno grupo G. Vendar so reprezentacije grup pomembne ne samo v teoriji grup, ampak tudi v analitični teoriji števil, in sicer za generiranje baznih funkcij v smislu zgoraj skicirane harmonične analize aritmetičnih funkcij.

Tako je npr. Dirichlet s pomočjo idej harmonične analize dokazal izrek o praštevilih v aritmetičnih zaporedjih, enega pomembnih mejnikov v teoriji števil, ki pravi: *Če sta p in q naravni, tuji si števili, potem aritmetično zaporedje $pm + q$, kjer $m = 0, 1, 2, \ldots$, vsebuje neskončno mnogo praštevil.* Pri svojem dokazu pa se ni mogel nasloniti na teorijo grup, saj je bil pojem grupe okrog 1830 znan le v obliki permutacijskih grup rešitev polinomskih enačb.

Četrto poglavje je posvečeno *krožni metodi*, ki je uporabna v diofantski analizi. Z njo se da oceniti število celoštevilskih rešitev različnih polinomskih enačb nad $\mathbb{Z}$, kadar je število neznank dovolj veliko. V knjigi je razvita do mere, da se da z njo dokazati Waringovo domnevo. Ta metoda se je najprej pojavila v članku Hardyja in Ramanujana (1917) o particijski funkciji $p(n)$, ki šteje, na koliko načinov lahko zapišemo n kot vsoto naravnih števil, pri čemer vrstni red ni važen. Z analizo singularnosti njene rodovne funkcije $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$, ki se jo da predstaviti z neskončnim produktom $f(z) = \prod (1 - z^m)^{-1}$, ter z uporabo Cauchyjeve integralske formule sta dobila asimptotsko oceno $p(n) \backsim \frac{e^{\pi \sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}$.

V petem poglavju je predstavljena metoda konturnih integralov, s katero se da dobiti asimptotske ocene za sumacijske funkcije $F(x) = \sum_{n \le x} a_n$ iz ustreznih Dirichletovih vrst $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ s pomočjo teorije residuov.

S to metodo je v šestem poglavju dokazan praštevilski izrek $\pi(x) \backsim \psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log(p)$ v obliki, da obstaja $c > 0$, da je $\psi(x) = x + O(x e^{-c \cdot \log^{1/10}(x)})$, ko $x \to +\infty$.

Morebitnega bralca naj opozorimo, da težavnost knjige iz poglavja v poglavje narašča. Ob tem se spomnimo Evklidove opazke, da ni kraljevske poti v matematiko.

V sedmem poglavju je praštevilski izrek posplošen na aritmetična zaporedja $n \equiv a \pmod{q}$. Že sama formulacija Siegel-Walfiszovega izreka je zahtevna, dokaz prav tako.

V osmem poglavju so obravnavane Fourierove vrste, Poissonova formula, Jacobijeva funkcija theta $\vartheta : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, definirana s predpisom $\vartheta(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e(nz)$, nadalje funkcija gama $\Gamma(s)$, ki jo po Weierstrassu lahko definiramo s pomočjo neskončnega produkta v obliki